

1. $9^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & 9^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}} \\ &= (3^2)^{\frac{2}{3}} \div (2^2 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3^{\frac{4}{3}} \div (2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}) \times (2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}}) \\ &= 2^{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{3}} \\ &= 2^0 \times 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

2. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}$ 을 간단히 하면?

- ① a ② $\sqrt{a}$ ③ $a\sqrt[7]{a^5}$ ④ $\sqrt[8]{a^5}$ ⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}} &= (a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}\end{aligned}$$

3. 제 3 항이 12이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = 12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

4. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a + b + c + d$ 의 값은?(단, a, b, c, d 는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a + b + c + d = 9 + 6 + 4 + 36 = 55$$

5. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

6. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

7. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

8. $\frac{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{4}} = 2^k$ 이 성립할 때, k 의 값은?

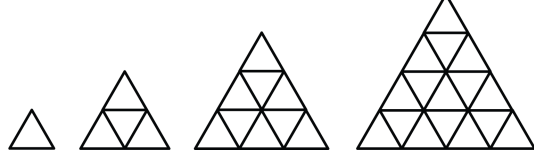
- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} (\text{주어진식}) &= \frac{5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{2}}{2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

9. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, ... 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6 배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



- ① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 9$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = n^2$$

$$\therefore a_6 = 36$$

10. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 2 : 3$ 가 성립할 때, $a_1 : a_8$ 는? (단, $a \neq 0$ 이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

$$\begin{aligned}3(a_1 + a_2) &= 2(a_3 + a_4) \\3(a + a + d) &= 2(a + 2d + a + 3d) \\6a + 3d &= 4a + 10d \\2a &= 7d \\a_1 : a_8 &= a : (a + 7d) \\&= a : 3a = 1 : 3\end{aligned}$$

11. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div 9 \text{ } \therefore \text{ } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

12. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100 이고, 11 항부터 20 항까지의 합이 300 일 때 21 항부터 30 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2, a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

13. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $n^2 + kn$, $2n^2 - 2n + 1$ 일 때, $a_{10} = b_{10}$ 을 만족하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$a_{10} = (10^2 + 10k) - (9^2 + 9k) = 19 + k$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 + 1) - (2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9 + 1) \\ &= 181 - 145 = 36 \end{aligned}$$

$$a_{10} = b_{10} \text{ 에서 } 19 + k = 36$$

$$\therefore k = 17$$

14. 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b 와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\frac{b+c}{a}$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b 와 c 사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$$b = a + d, c = a + 4d \cdots \text{㉠}$$

세 수 a, b, c 가 등비수열을 이루므로

$$(a + d)^2 = a(a + 4d)$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$$

$$\therefore d = 2a$$

$$\text{㉠에서 } b = 3a, c = 9a$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{3a+9a}{a} = 12$$

15. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $S_{10} = 48$, $S_{20} = 60$ 이다. 이때, S_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 48 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = 60 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} \div \textcircled{A}$ 을 하면

$$\frac{r^{20} - 1}{r^{10} - 1} = \frac{5}{4}, \quad \frac{(r^{10} + 1)(r^{10} - 1)}{r^{10} - 1} = \frac{5}{4}$$

$$r^{10} + 1 = \frac{5}{4} \quad \therefore r^{10} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} \cdot (r^{20} + r^{10} + 1)$$

$$= 48 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \right) = 63$$

16. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = 8n^2 + 10n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_9 + a_{10}) \\ &= \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= 8 \times 5^2 + 10 \times 5 = 250\end{aligned}$$

17. n 개의 수 $1 \cdot 2n, 2 \cdot (2n-1), 3 \cdot (2n-2), \dots, n(n+1)$ 의 합은?

① $\frac{n^2(n+1)}{2}$

② $\frac{n(n+1)^2}{2}$

③ $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

④ $\frac{(n+1)(2n+1)}{3}$

⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k 항은

$$k\{2n - (k - 1)\} = k(2n - k + 1)$$

$$= -k^2 + (2n + 1)k$$

이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^n k\{2n - (k - 1)\}$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (2n + 1)\sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

18. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k 에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2^1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^4}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 12 + 25 + 51 + 102 = 200\end{aligned}$$

19. 수열 $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ 의 첫째항부터 제 150항까지에서 $\frac{1}{2}$ 은 몇 번 나타나는가? (단, 약분해서 $\frac{1}{2}$ 인 것을 포함한다.)

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

주어진 수열을 군수열로 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \dots$$

제 n 군의 항의 개수는 n 개이고,

$$\frac{16 \cdot 17}{2} = 136, \frac{17 \cdot 18}{2} = 153 \text{ 이므로 제150항은 제17군의 14}$$

번째 항이다. $\frac{1}{2}$ 는 제2군, 제4군, 제6군, $\dots$, 제16군에서 1번씩 나타나므로 모두 8번 나타난다.

20. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행					1				
제2행				3	5	7			
제3행			9	11	13	15	17		
제4행	19	21	23	25	27	29	31		
⋮									

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$$\frac{(1)}{\text{제1군}}, \frac{(3, 5, 7)}{\text{제2군}}, \frac{(9, 11, 13, 15, 17)}{\text{제3군}}, \dots$$
각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 9, 19, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 6, 10, \dots$
 $\therefore b_n = 2 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 2$
 $\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$
이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는
 $163 + (5 - 1) \times 2 = 171$

21. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 일반항 a_n 은?

- ① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$
- ④ 2^{n-1}
- ⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 변형하면
 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$ 에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \therefore \alpha = 2$
즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$
따라서 수열 $\{a_n - 2\}$ 는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인
등비수열이므로
 $a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22. 수직선 위의 세 점 A(2), B(4), C(a)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 P, 선분 BC를 5 : 3으로 외분하는 점을 Q라 하자. 세 점 A, P, Q의 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a 의 값은?

- ① 6 ② $\frac{31}{5}$ ③ $\frac{32}{5}$ ④ $\frac{34}{5}$ ⑤ 7

해설

점 P의 좌표를 x 라 하면

$$x = \frac{8-2}{2-1} = 6$$

점 Q의 좌표를 y 라 하면

$$y = \frac{5a-12}{5-3} = \frac{5a-12}{2}$$

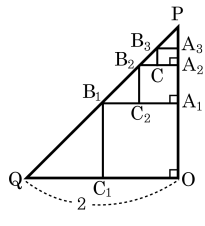
이때, 세 수 2, 6, $\frac{5a-12}{2}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 + \frac{5a-12}{2} = 6 \times 2$$

$$5a = 32$$

$$\therefore a = \frac{32}{5}$$

23. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$ 인 직각이등변 삼각형 OPQ에 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 A_1PB_1 에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$ 를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



- ① $\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}$ ② $\frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$
 ③ $\left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$ ④ $\frac{4}{3}$
 ⑤ $\frac{4}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}$

해설

삼각형 OPQ는 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$ 인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1이다. 즉, $\overline{OA_1} = 1$

마찬가지로 $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}$, $\overline{A_3A_4} = \frac{1}{4}, \dots$

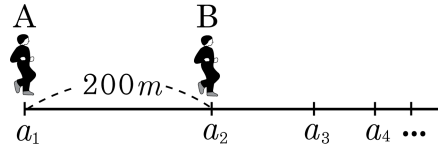
이때, 정사각형의 넓이는 1^2 , $\left(\frac{1}{2} \right)^2$, $\left(\frac{1}{4} \right)^2, \dots$ 이므로 구하는

정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열

의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$$

24. 다음 그림과 같이 A와 B가 직선 위를 따라 같은 방향으로 달린다. B는 A보다 200m앞에서 A와 동시에 출발한다. A의 출발점을 a_1 , B의 출발점을 a_2 , A가 a_2 에 도달했을 때 B의 위치를 a_3 , A가 a_3 에 도달했을 때 B의 위치를 a_4 라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 점 $a_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 정한다. A의 속도가 B의 속도의 2배이면 A와 B사이의 거리가 1m이내가 되기 시작할 때 A의 위치는?



- ① a_4 와 a_5 사이 ② a_6 와 a_7 사이 ③ a_8 과 a_9 사이
 ④ a_{10} 과 a_{11} 사이 ⑤ a_{12} 과 a_{13} 사이

해설

$$a_2 - a_1 = 200, \quad a_3 - a_2 = 100 = 200 \times \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = 50 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \dots$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{200} \text{ 에서 } 2^{n-1} \geq 200$$

$$\therefore n \geq 9$$

$$a_{10} - a_9 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 200 \times \frac{1}{256} \leq 1$$

25. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $\circ$ 를 $a \circ b = a^b$ 으로 정의한다. a, b, c, n 이 모두 양수일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a \circ b = b \circ a$

② $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- ③ $(a \circ b^n) = (a \circ n) \circ b$

④ $(a \circ b)^n = a \circ (bn)$
- ⑤ $(a^n \circ b)(a \circ b^n)$

해설

- ① $a^b \neq b^a$
- ② $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$
- ③ $a^{b^n} \neq (a^n)^b = a^{nb}$
- ④ $(a^b)^n = a^{bn} = a^{bn}$
- ⑤ $(a^n)^b = a^{nb} \neq a^{b^n}$