1. $9^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ 6　⑤ 9

해설

$$9^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}}$$
$$= (3^2)^{\frac{2}{3}} \div (2^2 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 3^{\frac{4}{3}} \div \left(2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}}\right)$$
$$= 2^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}$$
$$= 2^0 \times 3^2$$
$$= 9$$

2. $a > 0$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a}\,\sqrt[4]{a^5}}$을 간단히 하면?

① a ② $\sqrt{a}$ ③ $a\sqrt[7]{a^5}$ ④ $\sqrt[8]{a^5}$ ⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\,\sqrt[4]{a^5}} = (a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$$

3. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

4. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115　② 270　③ 326　④ 445　⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

6. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

7. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

8. $\dfrac{\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{4}}=2^k$ 이 성립할 때, k 의 값은?

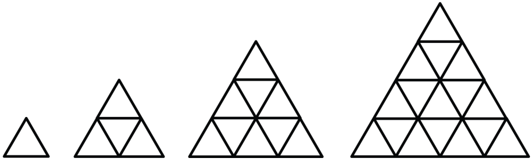
① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ 1

해설

$$(\text{주어진식}) = \frac{5\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

9. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 2 : 3$가 성립할 때, $a_1 : a_8$는? (단, $a \neq 0$이다.)

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

해설

$$3(a_1 + a_2) = 2(a_3 + a_4)$$
$$3(a + a + d) = 2(a + 2d + a + 3d)$$
$$6a + 3d = 4a + 10d$$
$$2a = 7d$$
$$\begin{aligned} a_1 : a_8 &= a : (a + 7d) \\ &= a : 3a = 1 : 3 \end{aligned}$$

11. 첫째항이 35 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$이므로 $d = -9$

$$\begin{aligned}\therefore S_{10} &= \frac{10(2a+9d)}{2} \\ &= \frac{10(70-81)}{2} \\ &= \frac{-110}{2} = -55\end{aligned}$$

12. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a+19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2,\ a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

13. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (2\cdot 10^2-2\cdot 10+1)-(2\cdot 9^2-2\cdot 9+1) \\ &= 181-145=36 \end{aligned}$$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

14. 서로 다른 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\dfrac{b+c}{a}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b와 c사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$b=a+d,\ c=a+4d \cdots$ ㉠

세 수 $a,\ b,\ c$가 등비수열을 이루므로

$(a+d)^2=a(a+4d)$

$a^2+2ad+d^2=a^2+4ad$

$\therefore\ d=2a$

㉠에서 $b=3a,\ c=9a$

$\therefore\ \dfrac{b+c}{a}=\dfrac{3a+9a}{a}=12$

15. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10}=48$, $S_{20}=60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=48\cdots ㉠$$

$$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=60\cdots ㉡$$

㉡÷ ㉠을 하면

$$\frac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=\frac{5}{4},\ \frac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r^{10}-1}=\frac{5}{4}$$

$$r^{10}+1=\frac{5}{4}\quad \therefore\ r^{10}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\cdot(r^{20}+r^{10}+1)$$

$$=48\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+1\right)=63$$

16. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=8n^2+10n$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdot+a_{10}$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})$
$=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$
$=8\times5^2+10\times5=250$

17. n개의 수 $1 \cdot 2n,\ 2 \cdot (2n-1),\ 3 \cdot (2n-2), \cdots,\ n(n+1)$의 합은?

① $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$　② $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$

③ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$　④ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}$

⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k항은

$k\{2n-(k-1)\} = k(2n-k+1)$

$= -k^2 + (2n+1)k$

이므로 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{n} k\{2n-(k-1)\}$

$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$

$= -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

18. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 200

해설

k에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]=\left[\frac{2^1}{10}\right]+\left[\frac{2^2}{10}\right]+\left[\frac{2^3}{10}\right]+\left[\frac{2^4}{10}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{10}}{10}\right]$$

$$=0+0+0+1+3+6+12+25+51+102=200$$

19. 수열 $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \cdots$ 의 첫째항부터 제 150항까지에서 $\frac{1}{2}$은 몇 번 나타나는가? (단, 약분해서 $\frac{1}{2}$인 것을 포함한다.)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

주어진 수열을 군수열로 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \cdots$$

제 n군의 항의 개수는 n개이고,

$\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$, $\frac{17 \cdot 18}{2} = 153$이므로 제150항은 제17군의 14번째 항이다. $\frac{1}{2}$는 제2군, 제4군, 제6군,$\cdots$, 제16군에서 1번씩 나타나므로 모두 8번 나타난다.

20. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
⋮				⋮			

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underset{\text{제1군}}{\underline{(1)}}, \underset{\text{제2군}}{\underline{(3,\ 5,\ 7)}}, \underset{\text{제3군}}{\underline{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}}, \cdots$ 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\} : 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-2) = 1 + 4 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$

21. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, 일반항 a_n은?

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}$

④ 2^{n-1} ⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22. 수직선 위의 세 점 A(2), B(4), C(a)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 P, 선분 BC를 5 : 3으로 외분하는 점을 Q라 하자. 세 점 A, P, Q의 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a의 값은?

① 6 ② $\frac{31}{5}$ ③ $\frac{32}{5}$ ④ $\frac{34}{5}$ ⑤ 7

해설

점 P의 좌표를 x라 하면

$$x = \frac{8-2}{2-1} = 6$$

점 Q의 좌표를 y라 하면

$$y = \frac{5a-12}{5-3} = \frac{5a-12}{2}$$

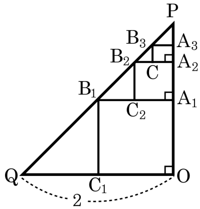
이때, 세 수 2, 6, $\frac{5a-2}{2}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 + \frac{5a-12}{2} = 6 \times 2$$

$$5a = 32$$

$$\therefore\ a = \frac{32}{5}$$

23. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2$ 인 직각이등변 삼각형 OPQ 에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$ 에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$ 를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5 회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



① $\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$　② $\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

③ $\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$　④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{4}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$

해설

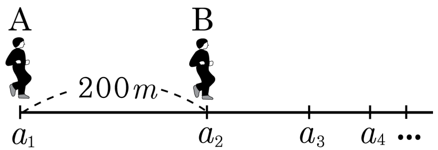
삼각형 OPQ 는 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2$ 인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1 이다. 즉, $\overline{\mathrm{OA_1}} = 1$

마찬가지로 $\overline{\mathrm{A_1A_2}} = \frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{A_3A_4}} = \frac{1}{4}, \cdots$

이때, 정사각형의 넓이는 1^2, $\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^4, \cdots$ 이므로 구하는 정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1 이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제5 항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$$

24. 다음 그림과 같이 A와 B가 직선 위를 따라 같은 방향으로 달린다. B는 A보다 200m 앞에서 A와 동시에 출발한다. A의 출발점을 a_1, B의 출발점을 a_2, A가 a_2에 도달했을 때 B의 위치를 a_3, A가 a_3에 도달했을 때 B의 위치를 a_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 점 $a_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 정한다. A의 속도가 B의 속도의 2배이면 A와 B 사이의 거리가 1m 이내가 되기 시작할 때 A의 위치는?



① a_4와 a_5 사이　② a_6와 a_7 사이　③ a_8과 a_9 사이
④ a_{10}과 a_{11} 사이　⑤ a_{12}과 a_{13} 사이

해설

$$a_2 - a_1 = 200,\ a_3 - a_2 = 100 = 200 \times \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = 50 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \cdots$$

$$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \le 1$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \le \frac{1}{200}$ 에서 $2^{n-1} \ge 200$

$$\therefore\ n \ge 9$$

$$a_{10} - a_9 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 200 \times \frac{1}{256} \le 1$$

25. 임의의 양수 a, b에 대하여 $\circ$를 $a \circ b = a^b$으로 정의한다. a, b, c, n이 모두 양수일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \circ b = b \circ a$　　② $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

③ $(a \circ b^n) = (a \circ n) \circ b$　　④ $(a \circ b)^n = a \circ (bn)$

⑤ $(a^n \circ b)(a \circ b^n)$

해설

① $a^b \neq b^a$

② $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$

③ $a^{b^n} \neq (a^n)^b = a^{nb}$

④ $(a^b)^n = a^{bn} = a^{bn}$

⑤ $(a^n)^b = a^{nb} \neq a^{b^n}$