1. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = 3n + 6$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = 3,\ d = -3$ ② $a = 3,\ d = 3$ ③ $a = 6,\ d = 3$

④ $a = 9,\ d = 3$ ⑤ $a = 9,\ d = -3$

해설

$a_n = 3n + 6$ 이므로

$a_1 = 3 \cdot 1 + 6 = 9,$

$a_2 = 3 \cdot 2 + 6 = 12$ 이므로

$d = a_2 - a_1 = 3$

2. $\sqrt[3]{-\sqrt{128}}$을 간단히 하면?

① 2 ② -2 ③ $-2\sqrt[6]{2}$

④ $-2\sqrt{2}$ ⑤ 허수

해설

$\sqrt{128}=(2^7)^{\frac{1}{2}}=2^3\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{(-2^3\sqrt{2})}=\sqrt[3]{(-2)^3\sqrt{2}}$

$=-2\sqrt[6]{2}$

3. 첫째항이 6, 공차가 -5 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

첫째항이 6 이고, 공차가 5 이므로 일반항은 a_n 은

$a_n = 6 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 11$

$-5n + 11 = -44$

$5n = 55 \quad \therefore \; n = 11$

4. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

5. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$13-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $13-(-3)=4d\ \ \therefore d=4$

$\therefore a=-3+4=1$

$b=1+4=5$

$c=5+4=9$

$\therefore a+b+c=15$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

7. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로
1, a_3, 64도 등비수열을 이룬다.
$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore\ a_3 = 8$

8. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3 ② $\sqrt{3}$ ③ 5 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

9. -3과 11사이에 n개의 수를 나열한 수열 $-3,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_n,\ 11$ 이 등차수열을 이루고 그 합이 32일 때 공차 d와 항수 n을 구하면?

① $d=2,\ n=4$ ② $d=2,\ n=5$ ③ $d=2,\ n=6$

④ $d=3,\ n=4$ ⑤ $d=3,\ n=6$

해설

$b_1=-3,\ b_2=a_1,\ \cdots,b_{n+2}=11$

이라하면

$b_{n+2}=-3+(n+1)d=11$

$$S_{n+2}=\frac{(n+2)(-3+11)}{2}$$
$$=4(n+2)=32$$

$\therefore n=6$

$-3+(n+1)\cdot d=11$이므로

$d=2$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=-n^2+2n$일 때, $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$
$=(-20^2+2\times20)-(-10^2+2\times10)$
$=-360-(-80)=-280$

11. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2}(\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

12. 첫째항부터 제3항까지의 합이 7, 제4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498 ② 502 ③ 511 ④ 512 ⑤ 524

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 7 \cdots ㉠$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 63 \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $7(r^3+1) = 63$

$r^3+1=9 \quad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a(2^3-1)=7 \quad \therefore \ a=1$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9-1)}{2-1} = 512-1 = 511$$

13. $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 일때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ 을 $f(n)$ 과 $f(2n)$ 으로 나타내면?

① $f(2n)-f(n)$

② $f(2n)-\frac{1}{2}f(n)$

③ $2f(n)-f(2n)$

④ $f(n)-\frac{1}{2}f(2n)$

⑤ $3f(n)-2f(2n)$

해설

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

$$=f(2n)-\frac{1}{2}\cdot f(n)$$

14. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 할 때, $\frac{S}{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 하면

$$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$$

$$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$$

$$\therefore S = 1320$$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

15. 수열 $\{a_n\}$이 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 α, β, γ의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\}$: 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$

2 4 8 16 $\cdots \rightarrow b_n = 2^n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

16. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$　② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$　④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

17. $a_1 = 1,\ 4a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 일반항 a_n 을 구하면?

① $\dfrac{1}{n}$　② $\dfrac{1}{2n-1}$　③ $\dfrac{1}{3n-2}$
④ $\dfrac{1}{4n-3}$　⑤ $\dfrac{1}{5n-4}$

해설

$4a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면

$$4 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4 인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4n-3}$$

18. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$a_{n+1} - a_n = 2^n$이므로 $b_n = 2^n$

따라서 $n \geq 2$일 때,

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$ 이때, $a_1 = 1$은 ㉠을 만

$= 2^n - 1 \cdots\cdots$ ㉠

족시키므로 구하는 일반항은 $a_n = 2^n - 1$

$\therefore a_9 = 2^9 - 1 = 511$

19. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)}$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

20. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
> 이 식의 양변에 $\boxed{(\text{가})}$을 더하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(\text{가})}$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(\text{가})}$
> $= \boxed{(\text{나})} \cdot 2^{k+2} + 2$
> 따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

21. $a = 2^{12}$ 일 때, $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$

$a = 2^{12}$ 이므로

$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$

22. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 $a,\ b$에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
>
> $A=\dfrac{a+b}{2},\ G=$ ㉠, $H=\dfrac{㉡}{a+b}$
>
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
>
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a=b$일 때 성립), ㉢ $=G^2$
>
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$

② (㉡) - ab

③ (㉢) - $A \times H$

④ (㉣) - 등비중항

⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 $a,\ x,\ b$가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b},\ x=\dfrac{2ab}{a+b}$

23. 수열 $\{a_n\}$을 $\log_3 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n(n-1)\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의할 때, $\dfrac{a_{21}}{a_{20}}$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$\log_3 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n(n-1)$에서

$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 3^{n(n-1)} \cdots$ ㉠

$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = 3^{(n-1)(n-2)} \cdots$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면 $a_n = 3^{2(n-1)}$

$$\therefore \ \frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{3^{40}}{3^{38}} = 3^2 = 9$$

24. 비어 있는 물탱크에 물을 채우려고 한다. 첫째 날은 7L의 불을 채우고, 다음 날부터 전날 채운 물의 양의 $\frac{4}{3}$ 배보다 1L 적은 양을 채우기로 하였다. 열 번째 날 물탱크에 채우는 물의 양은?

① $4\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+3\mathrm{L}$ ② $4\left(\frac{3}{4}\right)^{9}+3\mathrm{L}$ ③ $4\left(\frac{3}{5}\right)^{9}+3\mathrm{L}$
④ $4\left(\frac{4}{3}\right)^{10}+3\mathrm{L}$ ⑤ $4\left(\frac{5}{3}\right)^{10}+3\mathrm{L}$

해설

첫째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_1 이라 하면 $a_1=7$
n번째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_n 이라 하면

$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-1$

이때, $a_{n+1}-\alpha=\frac{4}{3}(a_n-\alpha)$ 라 하면 $-\frac{1}{3}\alpha=-1,\quad \alpha=3$

$\therefore a_{n+1}-3=\frac{4}{3}(a_n-3)$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=7-3=4$, 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이므로

$a_n-3=4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\quad \therefore a_n=4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+3$

$\therefore a_{10}=4\left(\frac{4}{3}\right)^{10-1}+3=4\left(\frac{4}{3}\right)^{9}+3(\mathrm{L})$

25. 세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ 중에서 두 수를 선택하여 a, b라고 할 때, $\dfrac{b}{a}$의 최댓값은?

① $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$　② $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$　③ $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$　④ $\sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$　⑤ $\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}$

해설

$\sqrt{2} = 8^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[3]{3} = 9^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$이다.

$a = \sqrt[6]{6}, b = \sqrt[3]{3}$일 때 최대이고,

$\dfrac{b}{a} = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$이다.