1. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2,\ 2$

해설

16의 네제곱근은

$x^4 = 16$를 만족하는 x의 값이므로

$x^4 - 16 = 0$에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore x = -2,\ 2,\ 2i,\ -2i$

따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은

$-2,\ 2$

2. 식 $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8}$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 8$

3. 다음 (　　) 안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i,\ \frac{5}{4}i,\ (\quad),\ \frac{9}{8}i,\ \frac{11}{10}i,\ \cdots$

① $\frac{5}{4}i$　② i　③ $\frac{7}{6}i$　④ $\frac{8}{6}i$　⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n이라 하면 $b_n = (2n+1)i$이다.
따라서 구하는 세 번째의 복소수는 $\frac{7}{6}i$이다.

4. 세 수 $-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 등차수열을 이루면 $5+x$가 등차중항이므로

$2(5+x)=-7+2x+5-4x$

$4x=-12$

$\therefore\ x=-3$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

6. 수열 $1,\ -10,\ 10^2,\ -10^4, \cdots$ 은 첫째항이 a, 공비가 r 인 등비수열이다. 이 때, $a+r$ 의 값은?

① -10　② -9　③ -8　④ -7　⑤ -6

해설

$a=1,\ r=-10$

$\therefore a+r=-9$

7. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26　② 27　③ 28　④ 29　⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

8. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(385+385)$

$=385$

9. 5개의 수 $1,\ x,\ y,\ z,\ 16$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x+y+z$의 값이 될 수 있는 것을 모두 구하여 더하면?

① -10　② -8　③ 8　④ 10　⑤ 18

해설

y는 1과 16의 등비중항이므로 $y^2=16 \quad \therefore\ y=\pm 4$
(i) $y=4$일 때, x는 1과 4의 등비중항이므로
$x^2=4 \quad \therefore\ x=\pm 2$
이때, $x=2$이면 공비가 2가 되므로 $z=8$
또, $x=-2$이면 공비가 -2가 되므로 $z=-8$
(ii) $y=-4$일 때, x는 1과 -4의 등차중항이므로 $x^2=-4$
이것을 만족하는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $x=2,\ y=4,\ z=8$ 또는 $x=-2,\ y=4,\ z=-8$ 이므로
$x+y+z=14$ 또는 $x+y+z=-6$
따라서 $x+y+z$의 값이 될 수 있는 것을 모두 더하면 $14+(-6)=8$

10. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\log_2 a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$
$= 3n - 1$
$a_n = 2^{3n-1}$
$\dfrac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

11. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2=96$, $a_1+a_2+a_3+a_4=120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127　　② 136　　③ 148　　④ 156　　⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1+a_2=96$에서 $a+ar=96\cdots$ ㉠

$a_1+a_2+a_3+a_4=120$에서 $96+a_3+a_4=120$

즉, $a_3+a_4=24$이므로

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=r^2(a+ar)$

$=96r^2=24$

$r^2=\frac{1}{4}\quad\therefore\ r=\frac{1}{2}(\because r>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{2}a=96\quad\therefore\ a=64$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=128\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}=128-1=127$$

12. 두 수 A, B에 대하여 $A=2^{10}$, $B=5^{10}$일 때, 두 수 A, B의 곱 AB의 양의 약수의 총합을 A와 B의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A+1)(5B+1)$
② $(5A-1)(5B-1)$
③ $\frac{1}{4}(2A+1)(5B-1)$
④ $\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$
⑤ $\frac{1}{2}(2A-1)(5B-1)$

해설

$AB=2^{10}\cdot5^{10}$

따라서 AB의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$

$=\frac{2^{11}-1}{2-1}\times\frac{5^{11}-1}{5-1}$

$=(2\cdot2^{10}-1)\times\frac{1}{4}(5\cdot5^{10}-1)$

$=(2A-1)\times\frac{1}{4}(5B-1)$

$=\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

13. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면
$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$이므로
$a_3 = S_3 - S_2$
$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
$\log_3(T_n - 1) = n$에서 $T_n = 3^n + 1$이므로
$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
$= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$이므로 $k + 5 = 18$ $\therefore$ $k = 13$

14. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$= 1000$만$\times 1.04^{10}$
$= 1000$만 $\times 1.48$
$= 1480$만 (원)

15. $a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$이라 할 때, 수열 $\frac{1}{1+a_1}, \frac{3}{3+a_2}, \frac{7}{1+a_3}, \frac{15}{1+a_4}, \cdots$의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

① $19 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$　② $20 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$　③ $19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
④ $20 + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$　⑤ $21 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

해설

$a_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$이고, 주어진 수열의 일반항은 $\frac{2^n - 1}{1 + a_k}$이다.

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{1 + a_k}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{1 + 2^k - 1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$= n - \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

따라서 $S_n = 19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

16. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 1, 2

3군은 1, 2, 3이므로

7군은 1, 2, 3, $\cdots$, 7

(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$(번째 항)

17. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{9}{64}$　② $\frac{11}{64}$　③ $\frac{9}{32}$　④ $\frac{19}{32}$　⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군　제2군　제3군

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$

제 n군까지의 항수는

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

따라서, 제 4군까지 항수는 15개이므로 구하는 제 20항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n군의 제 m항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5}=\frac{9}{32}$

18. $a_1 = 2,\ a_2 = 3$ 이고,
$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 의 값은?

① 490　② 495　③ 500　④ 505　⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1 인 등차수열이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{30} a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29})$
$+(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30})$
$= \dfrac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \dfrac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2}$
$= 495$

19. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 $m,\ n$에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4 = 72$일 때, a_5의 값은?

① $72\sqrt{3}$ ② $72\sqrt{6}$ ③ 144
④ $144\sqrt{3}$ ⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 2,\ n = 2$를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 = 72,\ a_2^2 = 36$

$\therefore\ a_2 = 6(\because\ a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 1,\ n = 1$을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6,\ a_1^2 = 3$

$\therefore\ a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_m a_n$에 $m = 4,\ n = 4$를 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

20. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $3 - 2^{12}$　② $3 - 2^{11}$　③ $3 - 2^{10}$
④ $3 - 2^{9}$　⑤ $3 - 2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$의 양변에 -3을 더하여 정리하면

$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^{9}$

21. $a_1 = 4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 성립할 때, 제 5 항은?

① 678　　② 708　　③ 738　　④ 768　　⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이고 $a_{n+1} = 3S_n$이므로
$S_{n+1} - S_n = 3S_n$
$\therefore S_{n+1} = 4S_n$
이때, $a_1 = S_1 = 4$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.
$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$
$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$
$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$

22. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \ge 2$ 일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii) 에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \ge 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \ge 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$ 에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \ge 1$ 이므로 $n = 10$

23. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n$ 인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$　② $3^{10}-1$　③ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$
④ $2(3^{10}-1)$　⑤ $\frac{5}{2}(3^{10}-1)$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$ 이므로 $r = 3$
$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$
$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$
$= \frac{3}{2}(3^{10}-1)$

24. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$일 때, $\dfrac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^{3}+a^{5}+a^{7}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}+1$　　② $\sqrt{2}-1$　　③ $3+2\sqrt{2}$

④ $3-2\sqrt{2}$　　⑤ $5+\sqrt{2}$

해설

$a^5 = \sqrt{2}-1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^{3}+a^{5}+a^{7}} &= \frac{a^{-10}(a^{3}+a^{5}+a^{7})}{a^{3}+a^{5}+a^{7}} \\ &= a^{-10} \\ &= (\sqrt{2}-1)^{-2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{2}} \\ &= \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

25. 함수 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$인 양수)에 대하여 다음 물음에 답하여라.

a가 $1+\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수인 값이라 할 때, 등식 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = p+q\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$이므로 $a^3 = 1+\sqrt{3}$이다.

$f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{1+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= -3+2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore\ p+q = -3+2 = -1$