1. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2,\ 2$

해설

16의 네제곱근은

$x^4 = 16$를 만족하는 x의 값이므로

$x^4 - 16 = 0$에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = -2,\ 2,\ 2i,\ -2i$

따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은

$-2,\ 2$

2. 식 $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8}$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 8$$

3. 다음 ( ) 안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i,\ \frac{5}{4}i,\ (\qquad),\ \frac{9}{8}i,\ \frac{11}{10}i,\ \cdots$

① $\frac{5}{4}i$ ② i ③ $\frac{7}{6}i$ ④ $\frac{8}{6}i$ ⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n이라 하면 $b_n = (2n+1)i$이다.

따라서 구하는 세 번째의 복소수는 $\frac{7}{6}i$이다.

4. 세 수 $-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 등차수열을 이루면 $5+x$가 등차중항이므로

$2(5+x)=-7+2x+5-4x$

$4x=-12$

$\therefore\ x=-3$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} = 25 \times 8 = 200$$

6. 수열 $1,\ -10,\ 10^2,\ -10^4, \cdots$ 은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다. 이 때, $a+r$의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$a=1,\ r=-10$

$\therefore a+r=-9$

7. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$ 의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

8. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(385+385)$$
$$=385$$

9. 5개의 수 1, x, y, z, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 세 실수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값이 될 수 있는 것을 모두 구하여 더하면?

① -10　② -8　③ 8　④ 10　⑤ 18

해설

y는 1과 16의 등비중항이므로 $y^2 = 16$ $\therefore$ $y = \pm 4$

(i) $y = 4$일 때, x는 1과 4의 등비중항이므로

$x^2 = 4$ $\therefore$ $x = \pm 2$

이때, $x = 2$이면 공비가 2가 되므로 $z = 8$

또, $x = -2$이면 공비가 -2가 되므로 $z = -8$

(ii) $y = -4$일 때, x는 1과 -4의 등차중항이므로 $x^2 = -4$

이것을 만족하는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$ 또는 $x = -2$, $y = 4$, $z = -8$ 이므로

$x+y+z = 14$ 또는 $x+y+z = -6$

따라서 $x+y+z$의 값이 될 수 있는 것을 모두 더하면 $14+(-6) = 8$

10. 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$는 공비이므로 8

11. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2=96$, $a_1+a_2+a_3+a_4=120$일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127 ② 136 ③ 148 ④ 156 ⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1+a_2=96$에서 $a+ar=96\cdots$㉠

$a_1+a_2+a_3+a_4=120$에서 $96+a_3+a_4=120$

즉, $a_3+a_4=24$이므로

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=r^2(a+ar)$

$=96r^2=24$

$r^2=\frac{1}{4}\quad\therefore\ r=\frac{1}{2}(\because r>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{2}a=96\quad\therefore\ a=64$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=128\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}=128-1=127$$

12. 두 수 A, B에 대하여 $A=2^{10}$, $B=5^{10}$일 때, 두 수 A, B의 곱 AB의 양의 약수의 총합을 A와 B의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A+1)(5B+1)$

② $(5A-1)(5B-1)$

③ $\frac{1}{4}(2A+1)(5B-1)$

④ $\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A-1)(5B-1)$

해설

$AB=2^{10}\cdot 5^{10}$

따라서 AB의 양의 약수의 총합은

$$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$$

$$=\frac{2^{11}-1}{2-1}\times\frac{5^{11}-1}{5-1}$$

$$=(2\cdot 2^{10}-1)\times\frac{1}{4}(5\cdot 5^{10}-1)$$

$$=(2A-1)\times\frac{1}{4}(5B-1)$$

$$=\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$$

13. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면
$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$이므로
$a_3 = S_3 - S_2$
$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
$\log_3(T_n - 1) = n$에서 $T_n = 3^n + 1$이므로
$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
$= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore \ k = 13$

14. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만(원)

15. $a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$ 이라 할 때, 수열 $\dfrac{1}{1+a_1}, \dfrac{3}{3+a_2}, \dfrac{7}{1+a_3}, \dfrac{15}{1+a_4}, \cdots$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

① $19-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ② $20-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ③ $19+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
④ $20+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$ ⑤ $21+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

해설

$a_n = \dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$ 이고, 주어진 수열의 일반항은 $\dfrac{2^n-1}{1+a_k}$ 이다.

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k-1}{1+a_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k-1}{1+2^k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$= n - \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

따라서 $S_n = 19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

16. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 $1,\ 2$

3군은 $1,\ 2,\ 3$이므로

7군은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$(번째 항)

17. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{9}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군 제2군 제3군

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$$

제 n군까지의 항수는

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

따라서, 제 4군까지 항수는 15개이므로 구하는 제 20항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n군의 제 m항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$

18. $a_1 = 2,\ a_2 = 3$이고,
$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?

① 490　② 495　③ 500　④ 505　⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{30} a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29})$
$+(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30})$
$= \dfrac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \dfrac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2}$
$= 495$

19. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 m, n에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4 = 72$일 때, a_5의 값은?

① $72\sqrt{3}$ ② $72\sqrt{6}$ ③ 144

④ $144\sqrt{3}$ ⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 2$, $n = 2$를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 = 72$, $a_2^2 = 36$

$\therefore\ a_2 = 6(\because\ a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 1$, $n = 1$을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6$, $a_1^2 = 3$

$\therefore\ a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_m a_n$에 $m = 4$, $n = 4$를 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

20. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3-2^{12}$ ② $3-2^{11}$ ③ $3-2^{10}$

④ $3-2^{9}$ ⑤ $3-2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$ 의 양변에 -3을 더하여 정리하면

$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2 인 등비수열이므로

$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^{9}$

21. $a_1 = 4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 성립할 때, 제 5항은?

① 678 ② 708 ③ 738 ④ 768 ⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이고 $a_{n+1} = 3S_n$이므로

$S_{n+1} - S_n = 3S_n$

$\therefore S_{n+1} = 4S_n$

이때, $a_1 = S_1 = 4$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$

$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$

22. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2(n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

23. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n$ 인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$ ② $3^{10}-1$ ③ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$

④ $2(3^{10}-1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(3^{10}-1)$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$ 이므로 $r = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$$

$$= \frac{3}{2}(3^{10}-1)$$

24. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$일 때, $\dfrac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^3+a^5+a^7}$의 값은?

① $\sqrt{2}+1$　② $\sqrt{2}-1$　③ $3+2\sqrt{2}$

④ $3-2\sqrt{2}$　⑤ $5+\sqrt{2}$

해설

$a^5 = \sqrt{2}-1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^3+a^5+a^7} &= \frac{a^{-10}(a^3+a^5+a^7)}{a^3+a^5+a^7}\\ &= a^{-10}\\ &= (\sqrt{2}-1)^{-2}\\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\\ &= \frac{1}{3-2\sqrt{2}}\\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

25. 함수 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$인 양수)에 대하여 다음 물음에 답하여라.

a가 $1+\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수인 값이라 할 때, 등식 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = p+q\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$이므로 $a^3 = 1+\sqrt{3}$이다.

$f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \dfrac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{a^3 - 1}{a^3 + 1} = \frac{1+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= -3 + 2\sqrt{3}$$

$\therefore\ p+q = -3+2 = -1$