1. $\log_9 x = -\frac{3}{2}$ 을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{27}$

해설

$\log_9 x = -\frac{3}{2}$

$\iff x = 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

2. $\log_x 9 = \frac{2}{3}$를 만족하는 x의 값은?

① 3 ② 9 ③ 27 ④ 30 ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$\log_x 9 = \frac{2}{3}$에서 $x^{\frac{2}{3}} = 9$

양변을 $\frac{3}{2}$제곱하면 $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ x = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 27$

3. $\log_3(x-5)^2$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 4$ ② $x < 5$ ③ $x > 5$ ④ $x \neq 4$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$(x-5)^2 > 0$ 로부터 $x \neq 5$

4. $\log_2 5\sqrt{3} + \log_2 \frac{24}{5} - \log_2 3\sqrt{3}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

해설

$\log_2 5\sqrt{3} + \log_2 \frac{24}{5} - \log_2 3\sqrt{3} = \log_2 \frac{5\sqrt{3} \times \frac{24}{5}}{3\sqrt{3}}$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

5. $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$ 이고 $\log_{a^2 b} ab^2 = 3$ 일 때, $\log_a b$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$\log_{a^2 b} ab^2 = \dfrac{\log ab^2}{\log a^2 b} = \dfrac{\log a + 2\log b}{2\log a + \log b} = 3$ 에서

$\log a + 2\log b = 6\log a + 3\log b$

$-5\log a = \log b$

$-5 = \log_a b$

$\therefore\ \log_a b = -5$

6. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② -1　③ 0　④ $\log_3 2$　⑤ $\log_2 3$

해설

$(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$

$= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75$

$= \log_3 5 - \frac{1}{2}\log_3 75$

$= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}}$

$= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{1}{2}$

7. $3^{\log_4 5^{\log_3 4}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$3^{\log_4 5^{\log_3 4}} = 3^{\log_3 4 \cdot \log_4 5} = 3^{\log_3 5} = 5$

8. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$ 의 값은?

① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$\log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12}$

$= \frac{5}{12}$

9. $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} y = 2$일 때, $\log_x y$의 값은?

① -4 ② -1 ③ $\frac{1}{4}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$\log_{\frac{1}{2}} y = -\log_2 y = 2$이므로

$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$

10. $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$일 때, $\log_{10} 12$를 a, b로 나타내면?

① $2ab$　　② a^2b　　③ $2a+b$
④ a^2+b　　⑤ $a+2b$

해설

$\log_{10} 12 = \log_{10}(3 \times 2^2)$
$= \log_{10} 3 + \log_{10} 2^2$
$= \log_{10} 3 + 2\log_{10} 2$
$= b + 2a$

11. $\sqrt[3]{2^a} = 4$, $\log_3 b = 1 - \log_3 \frac{1}{9}$ 일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 162

해설

$\sqrt[3]{2^a} = 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{a}{3}} = 2^2$

$\Leftrightarrow \frac{a}{3} = 2 \Leftrightarrow a = 6$

$\log_3 b = 1 - \log_3 \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \log_3 b = \log_3 3 + \log_3 3^2$

$\Leftrightarrow \log_3 b = \log_3 3^3$

$\Leftrightarrow b = 3^3$

$\therefore ab = 6 \times 3^3 = 162$

12. 양수 A 에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?

① 정수 부분 : -1, 소수 부분 : 0.659
② 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.341
③ 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.659
④ 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.341
⑤ 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.659

해설

$-2.341 = -2 - 0.341 = (-2 - 1) + (1 - 0.341)$
$= -3 + 0.659$
따라서 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.659 이다.

13. $\log x = \bar{2}.6044$ 일 때, $\log x^2$ 의 값은?

① $\bar{2}.3022$ ② $\bar{3}.2088$ ③ $\bar{4}.5110$
④ $\bar{5}.4890$ ⑤ $\bar{6}.5110$

해설

$\log x = \bar{2}.6044 = -2 + 0.6044$ 이므로
$\log x^2 = 2\log x$
$= 2(-2 + 0.6044)$
$= -4 + 1.2088$
$= -3 + 0.2088$
$= \bar{3} + 0.2088$

14. 수열 $\log_{10}(n+2)$ 의 제 98 항은?

① $\log_2 10$ ② $\log_2 100$ ③ 10
④ 1 ⑤ 2

해설

$a_n = \log_{10}(n+2)$ 이므로
$a_{98} = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$
따라서 , 제 98 항은 2 이다.

15. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$ 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$ 이다.

16. $\log_8 3 = p,\ \log_3 5 = q$일 때, $\log_{10} 5$를 $p,\ q$로 나타내면?

① pq　　② $\dfrac{p-q}{3}$　　③ $\dfrac{2pq}{p+q}$

④ $\dfrac{3pq}{1+3pq}$　　⑤ $\sqrt{p^2+q^2}$

해설

$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \dfrac{1}{3}\log_2 3 = p$

$\therefore \log_2 3 = 3p$

$\log_{10} 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 10} = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 2} = \dfrac{q}{q+\frac{1}{3p}}$

$= \dfrac{3pq}{3pq+1}$

17. $\log_3 2 = a$일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{2a+1}$ ② $\dfrac{4}{2a+1}$ ③ $\dfrac{2}{a+1}$

④ $\dfrac{2}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{4}{a+2}$

해설

$\log_{\sqrt{12}} 9$

$= \dfrac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}\log_3(2^2 \cdot 3)}$

$= \dfrac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \dfrac{4}{2(a+1)} = \dfrac{2}{a+1}$

18. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{2a+b}{b-a}$ ③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$

④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ b = \log_5 3$

$\log_6 72 = \dfrac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{3a+2b}{a+b}$

19. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$　　② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$　　④ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{1}\log_5 5 = 4$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 2^{-4} = \frac{-4}{-1}\log_2 2 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1}\log_3 3 = -4$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 5}$

$= \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4$

$= 4\log_2 2 = 4$

20. 1이 아닌 양수 p와 세 양수 x, y, z에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$가 성립할 때, xyz의 값은?

① $\frac{1}{p^3}$ ② $\frac{1}{2p}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $2p$ ⑤ p^2

해설

$\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z$

$= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z$

$= \log_p xyz = -3$

$\therefore xyz = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$

21. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$일 때, $a + 2b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$

$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$

22. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(20^x) = \dfrac{1}{x} - \log_3 5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$　　⑤ $1+\log_3 2$

해설

$20^x = 3$ 이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

23. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
$= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

24. $\log(31.4 \times A) = 1.0471$ 일 때, 양수 A의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구한 것은?

수	0	1	2	3	4	5
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5326	.5250
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378
3.5	.5441	.5435	.5465	.5478	.5490	.5502

① 0.3020 ② 0.355 ③ 1.35

④ 2.30 ⑤ 2.33

해설

$\log(31.4 \times A) = 1.0471$ 에서
$\log 31.4 + \log A = 1.0471$
$\log A = 1.0471 - \log 31.4$
$= 1.0471 - (1 + \log 3.14)$
$= 1.0471 - (1 + 0.4969)$($\therefore$로그표에서 $\log 3.14 = 0.4969$)
$= -0.4498$
$= -1 + 0.5502$
그런데 주어진 로그표에서 $\log 3.55 = 0.5502$ 이므로 $A = 0.355$ 이다.

25. $\log 80$ 의 정수 부분을 n, 소수 부분을 a 라 할 때, $10^n + 10^a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\log 80 = \log(10 \times 8) = 1 + \log 8$ 에서
$0 < \log 8 < 1$ 이므로
$\log 80$ 의 정수 부분은 1 이고 소수 부분은 $\log 8$ 이다.
즉 $n = 1, a = \log 8$ 이므로
$10^n + 10^a = 10 + 10^{\log 8} = 10 + 8 = 18$

26. $\log 4.02 = 0.6042$ 일 때, $\log 4020^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36, 0.042

해설

$\log 4020^{10} = 10 \log 4020$
$= 10 \log(4.02 \times 1000)$
$= 10(\log 4.02 + \log 1000)$
$= 10(0.6042 + 3)$
$= 10 \times 3.6042 = 36.042$

27. $\log 3.14 = 0.4969$ 일 때, $\log 3140^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34, 0.969

해설

$\log 3140^{10} = 10 \log 3140$
$= 10 \log(3.14 \times 1000)$
$= 10(\log 3.14 + \log 1000)$
$= 10(0.4969 + 3)$
$= 10 \times 3.4969 = 34.969$

28. 다음 <보기> 의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log 55$ 의 소수 부분과 같은 것의 개수를 구하면? (단, $\log 550 = 2.7404$)

보기

㉠ $\log 5.05$	㉡ $\log 0.00055$
㉢ $\log \dfrac{1}{550}$	㉣ $\log(5.5 \times 10^{10})$
㉤ $\log 5.5^{10}$	

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\log 550$ 의 진수 550과 소숫점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같은 수의 상용로그의 소수 부분은 $\log 550$ 의 소수 부분과 같다. 따라서 <보기> 중 $\log 550$ 과 소수 부분이 같은 것은 ㉡, ㉣ 의 2 개이다.

29. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$ 이다. 수열 $\{b_n\}$에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항　② 제6항　③ 제7항
④ 제8항　⑤ 제9항

해설

$a_n = 2n$ 이므로 $b_n = 2^{2n}$

$4^n > 2000$ 에서 $2n \log 2 > \log 2000$

$\therefore\ n > \dfrac{3.3010}{0.6020} = 5.48\times\times\times$

따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

30. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a>0,\ a\neq 1, b>0$

(i) $(k-2)^2>0 \rightarrow k\neq 2$

(ii) $(k-2)^2\neq 1 \rightarrow k\neq 3,\ 1$

(ii) $kx^2+kx+1>0$

$\rightarrow k=0$ 또는 $k>0$일때, $k^2-4k<0$

$\therefore\ 0<k<4$

따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

31. $\log_2 14$ 의 소수부분을 $a(0 \le a < 1)$ 이라 할 때, 2^{a+2} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$2 < \log_2 n < 3$

정수 부분 : $1 + 2 = 3$

소수 부분 : $\log_2 14 - 3 = \log_2 \frac{14}{8} = a$

$a + 2 = a + \log_2 4$

$= \log_2 \frac{14}{8} \cdot 4 = \log_2 \frac{14}{2} = \log_2 7$

$2^{a+2} = 2^{\log_2 7} = 7$

32. 방정식 $2x^2-8x-1=0$의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① -2 ② -8 ③ -12 ④ -26 ⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\log_{10} a + \log_{10} b = 4$,

$\log_{10} a \cdot \log_{10} b = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_a b + \log_b a = \dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

$= \dfrac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2\log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b}$

$= \dfrac{16+1}{-\dfrac{1}{2}} = -34$

33. $\log_2 x = 5.2$ 일 때, $\log\frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 ? (단, $\log 2 = 0.30$)

① 0.32 ② 0.36 ③ 0.40 ④ 0.44 ⑤ 0.48

해설

$\log_2 x = 5.2$ 이므로 $\frac{\log x}{\log 2} = 5.2, \log x = 1.56$

$\log\frac{1}{x} = -\log x = -1.56 = -2 + 0.44$

$\therefore \log\frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 0.44

34. $\log \frac{1}{A^2}$ 의 정수 부분이 -3 인 자연수 A 의 개수는? (단, $\sqrt{10} = 3.16$ 으로 계산한다.)

① 15개　② 18개　③ 21개　④ 24개　⑤ 27개

해설

$\log \frac{1}{A^2}$ 의 정수 부분이 3 이므로

$-3 \le \log \frac{1}{A^2} < -2,\ -3 \le -2\log A < -2$

$1 < \log A \le \frac{3}{2},\ \log 10 < \log A \le \log 10^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ 10 < A \le 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} = 31.6$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $31 - 10 = 21$(개)

35. 상용로그 $\log x$ 의 정수 부분은 3이고, $\log x$ 와 $\log x^2$ 의 소수 부분의 합은 1이다. 이때, $\log x^3$ 의 값은?

① 9 또는 10　　② 10 또는 11　　③ 11 또는 12

④ 12 또는 13　　⑤ 13 또는 14

해설

$\log x = 3 + \alpha (0 \le \alpha < 1)$ 로 놓으면
$\log x^2 = 2\log x = 6 + 2\alpha (0 \le 2\alpha < 2)$ 이므로

(i) $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때,

$\log x^2$ 의 소수 부분은 2α 이므로

$\alpha + 2\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때,

$\log x^2$ 의 소수 부분은 $2\alpha - 1$ 이므로

$\alpha + (2\alpha - 1) = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$

(i),(ii)에서 $\alpha = \frac{1}{3}$ 또는 $\alpha = \frac{2}{3}$ 이므로

$\log x^3 = 3\log x = 9 + 3\alpha$ 의 값은 10또는 11이다.

36. $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라 할 때 $n+8\alpha$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\log x = 3+\beta \ (0 \le \beta < 1)$

$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log x = 1+\frac{\beta}{3}$

$\therefore \ \beta+\frac{\beta}{3} = 1$

$\therefore \ \beta = \frac{3}{4}$

$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3+\alpha) = \frac{3}{2}+\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$n = 2, \ \alpha = \frac{1}{4}$

$n+8\alpha = 2+2 = 4$

37. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환 $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1-0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

38. 각 항이 모두 양수로 이루어진 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\left\{\log \frac{1}{a_n}\right\}$은 어떤 수열인지 구하면?

① 공차가 $\frac{1}{a}$인 등차수열 ② 공차가 $\frac{1}{\log r}$인 등차수열
③ 공차가 $-\log r$인 등차수열 ④ 공차가 $\frac{1}{r}$인 등비수열
⑤ 공차가 $-\log r$인 등비수열

해설

$\{a_n\}$은 등비수열이므로
$a_n = ar^{n-1}$이라 하면 $(a > 0,\ r > 0)$
$\log a_n = \log ar^{n-1} = \log a + (n-1)\log r$
$\log a_{n+1} = \log ar^n = \log a + n\log r$
$\therefore\ \log a_{n+1} - \log a_n = \log r$
$\log \frac{1}{a_{n+1}} - \log \frac{1}{a_n} = -\log a_{n+1} + \log a_n$
$= -1(\log a_{n+1} - \log a_n)$
$= -\log r$(상수)
따라서 수열 $\left\{\log \frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 $-\log r$인 등차수열을 이룬다.

39. 다음 글을 읽고 물음에 답하여라.

> 가로등의 밝기를 A, 가로등에서 xm 떨어진 곳에서의 가로등의 밝기를 B라 하면 $B = A \cdot a^x$($a > 0$인 상수) 인 관계가 성립한다. 이때 가로등에서 나오는 광선이 대기 중을 지나 원래 밝기의 0.05(5%) 로 감소되는 투과 거리를 시정이라고 하고 km 단위, 또는 m 단위로 나타낸다.

어느 안개 낀 지역의 시정이 200m 일 때, 가로등의 밝기가 50% 로 어두워지는 곳은 가로등으로 부터 약 몇 m 떨어진 곳인가? (단, $\log 2 = 0.3$ 이고 안개의 밀도는 일정하다.)

① 46 ② 70 ③ 86 ④ 100 ⑤ 120

해설

시정의 정의에 따라 $A \cdot a^{200} = 0.05A$

따라서 $a^{200} = 0.05$ 이므로 $a = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{200}}$

가로등의 밝기가 50% 로 어두워지는 곳까지의 거리를 pm 라고

하면 $a^p = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{p}{200}} = \frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면 $\frac{p}{200}\log 20 = \log 2$

$p = 200\frac{\log 2}{\log 20} = \frac{200 \times 0.3}{1 + 0.3} = 46.15 \times \times\times$

따라서 약 46m

40. 정부에서는 흡연률과 간접흡연의 피해를 줄이고 청소년 흡연예방 등을 위해 담배 가격을 지속적으로 인상하려고 한다. 만약 정부가 담배 가격을 매년 일정한 시기에 바로 이전 연도 보다 15% 씩 올리기로 한다면, 현재 가격의 세 배 이상이 되는 것은 최소 n 년이 경과해야 하는지를 아래 상용로그표를 이용하여 구하면? (단, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 이다.)

< 상용로그표 >

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

현재 가격을 a 라 하고, n 년후 처음으로
3 배 이상이 된다고 하면 $a(1+0.15)^n \geq 3a$,
$n\log 1.15 \geq \log 3$
$n \geq \dfrac{\log 3}{\log 1.15} = \dfrac{0.4771}{0.0607} = 7.8\times\times\times$
8 년 후 처음으로 3 배 이상이 된다.

41. 다음은 2.3^9 의 값을 구하는 과정이다.

$\log 2.3^9 = 9\log 2.3 = $ (㉠) $\log 1.8 = 0.2553$ 이므로 $\log 2.3^9 = 3 + 0.2553$ $= 3 + \log 1.8$ $= \log($㉡$)$ $\therefore 2.3^9 = $ (㉡)

위의 과정에서 (㉠), (㉡) 에 알맞은 수를 차례로 나열한 것은? (단, $\log 1.8 = 0.2553,\ \log 2.3 = 0.3617$)

① $3.2553, 1800$ ② $3.2553, 180$ ③ $4.2553, 2800$
④ $4.52553, 280$ ⑤ $5.2553, 18000$

해설

$\log 2.3 = 0.3617$ 이므로
$\log 2.3^9 = 9\log 2.3 = 9 \times 0.3617 = 3.2553$
$\log 1.8 = 0.2553$ 이므로
$\log 2.3^9 = 3 + 0.2553$
$= 3 + \log 1.8 = \log 10^3 + \log 1.8$
$= \log(10^3 + 1.8) = \log 1800$
따라서 $2.3^9 = 1800$

42. 상용로그 $\log x$ 의 소수 부분을 $f(x)$ 라 하자. $0 < f(x) < \frac{1}{4}$ 일 때, $f(x^2) + f\left(\frac{\sqrt{10}}{x^2}\right)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{2}{3}$　　⑤ 1

해설

$f(x) = \alpha$ 라 하면

$\log x = n + \alpha$ $\left(n\text{은정수, } 0 < \alpha < \frac{1}{4}\right)$ 라 할 수 있다.

이때, $\log x^2 = 2\log x = 2n + 2\alpha$

그런데 $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ 에서 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}$ 이므로

$\log x^2$ 의 소수 부분은 2α 이다.

$\therefore\ f(x^2) = 2\alpha$

또, $\log\frac{\sqrt{10}}{x^2} = \log\sqrt{10} - \log x^2$

$$= \frac{1}{2} - (2n + 2\alpha)$$
$$= -2n + \frac{1}{2} - 2\alpha$$

이 때, $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ 에서 $0 < \frac{1}{2} - 2\alpha < \frac{1}{2}$ 이므로

$\log\frac{\sqrt{10}}{x^2}$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{2} - 2\alpha$ 이다.

$\therefore\ f\left(\frac{\sqrt{10}}{x^2}\right) = \frac{1}{2} - 2\alpha$

$\therefore f(x^2) + f\left(\frac{\sqrt{10}}{x^2}\right) = 2\alpha + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right) = \frac{1}{2}$

43. 18^{50} 이 63자리의 정수일 때, 18^{15} 은 몇 자리의 정수인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$\log 18^{50} = 62 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$\log 18^{15} = 15 \log 18$

$= \dfrac{15}{50}(62 + \alpha)$

$= \dfrac{3}{10}(62 + \alpha)$

$= \dfrac{186}{10} + \dfrac{3\alpha}{10}$

$= 18 + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10}\alpha$

$0 \le \alpha < 1$ 이므로

$\dfrac{6}{10} \le \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10}\alpha < \dfrac{9}{10}$ 이므로

지표$= 18$, 가수$= \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10}\alpha$

$\therefore$ 19자리 정수

44. $\frac{1}{2^n}$ 이 소수점 아래 20번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타나는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 195

해설

$\frac{1}{2^n}$ 이 소수점 아래 20번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타나므로

$\log \frac{1}{2^n}$ 의 지표는 -20이다.

$-20 \le \log \frac{1}{2^n} < -19$

$-20 \le -n \log 2 < -19$

$\frac{19}{0.30} < n \le \frac{20}{0.30}$

$63.3\times\times\times < n \le 66.6\times\times\times$

$n = 64,\ 65,\ 66$

따라서 구하는 합은 $64 + 65 + 66 = 195$

45. 3^{100} 은 a 자리 정수이고, 최고 자리의 숫자는 b 이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① 51　② 152　③ 53　④ 54　⑤ 55

해설

$\log 3^{100} = 100\log 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$
$\log 3^{100}$ 의 지표가 47 이므로 3^{100} 은 48 자리의 정수이다.
이때
$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0.6990$
$\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0.7781$ 이므로
$\log 5 < 0.71 < \log 6,\ 47 + \log 5 < 47.71 < 47 + \log 6$
따라서 $\log(5 \times 10^{47}) < \log 3^{100} < (6 \times 10^{47})$
$5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47}$
3^{100} 의 최고 자리의 숫자는 5 이므로
따라서 $a+b=53$

46. $1 < x < 10$ 인 실수 x에 대하여 $\log x^3$ 과 $\log \dfrac{1}{x^2}$ 의 소수 부분이 같은 모든 x의 값의 곱을 구하면?

① 10　② $10^{\frac{8}{5}}$　③ 10^2　④ $10^{\frac{5}{2}}$　⑤ 10^3

해설

$1 < x < 10$ 에서 $0 < \log x < 1$ 이므로 $\log x = \alpha$ 로 놓으면
$\log x^3 = 3\log x = 3\alpha$,
$\log \dfrac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2\log x = -2\alpha$
이때, $\log x^3 - \log \dfrac{1}{x^2} = 5\alpha$ 이므로 5α 는 정수이다.
한편, $0 < \alpha < 1$ 이므로 $0 < 5\alpha < 5$
$\therefore 5\alpha = 1, 2, 3, 4$
즉, $\alpha = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$ 이므로
$\log x = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$
$\therefore x = 10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, 10^{\frac{4}{5}}$
따라서 모든 x의 값들의 곱은
$10^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}} = 10^2$

47. '$\log A = 10.4682$일 때 $A = \alpha \times 10^n$이다.' (단$0 \le \alpha < 1$)에서 $n + [\alpha]$를 구하여라.(단 $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$이고 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A = \alpha \times 10^n$의 양변에 밑이 10인 log를 취하면
$\log A = n + \log a$
따라서 $n = 10, \log a = 0.4682$이다.
$\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$이므로 $2 < \alpha < 3$이다.
따라서 $n = 10, [a] = 2$이다.

48. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A에서 B로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F는 $\mathrm{F} = 10\log\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)$ (데시벨)로 정의한다. 전파감쇄비가 -7(데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}} = 2$로 계산한다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$-7 = 10\log\frac{B}{A}$

$-\frac{7}{10} = \log\frac{B}{A}$

$\frac{B}{A} = 10^{-\frac{7}{10}} = 10^{-1} \times 10^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

49. 어느 도시의 인구가 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 만에 2배가 되었다. 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 몇 % 씩 증가하였는지 구하여라. (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

10년 전 인구를 A명이라 하고,
인구 증가율을 a% 라 하면
$A(1+\frac{a}{100})^{10} = 2A$, $\therefore$ $(1+\frac{a}{100})^{10} = 2$
양변에 상용로그를 취하면
$10\log(1+\frac{a}{100}) = \log 2$
$\log(1+\frac{a}{100}) = \frac{1}{10}\log 2 = \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03$
이때 $\log 1.07 = 0.03$이므로
$1 + \frac{a}{100} = 1.07$ $\quad\therefore$ $a = 7$
따라서 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 7% 씩 증가하였다.

50. 현재 어떤 광물의 전세계 매장량은 5×10^{12} 톤이고, 금년도 소비량은 2×10^{9} 톤으로 추정된다. 이 광물의 소비량은 매년 그 전년도에 비해 5% 씩 증가한다고 할 때, 약 몇 년 후면 이 광물이 고갈되는지 다음 상용로그표를 이용하여 구하면?

x	$\log x$
1.05	0.021
1.12	0.049
1.19	0.076
1.26	0.100

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

해설

n 년 후에 이 광물이 고갈된다고 하면

$$5 \times 10^{12} = 2 \times 10^{9}(1 + 1.05 + 1.05^{2} + \cdots + 1.05^{n-1})$$

$$5 \times 10^{12} = 2 \times 10^{9} \times \left(\frac{1.05^{n} - 1}{0.05}\right)$$

$$\frac{5 \times 10^{3}}{2} = \frac{1.05^{n} - 1}{0.05}$$

$$\frac{5 \times 10^{3}}{2} \times \frac{1}{20} = 1.05^{n} - 1$$

$$125 = 1.05^{n} - 1$$

$$1.05^{n} = 126,\ n \log 1.05 = \log 126$$

$$\therefore\ n = \frac{2 + \log 1.26}{\log 1.05} = \frac{2.100}{0.021} = 100$$

따라서 약 100 년 후면 이 광물이 고갈된다.