1. $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$ 일 때,

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$=\frac{x+y-2\sqrt{xy}+x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x-y}$$

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2} \\ x-y=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\times 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

2. 무리함수 $y=\sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동 $f:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

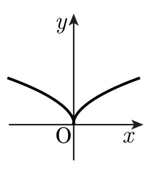
해설

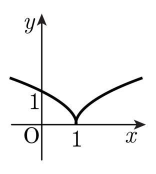
$y=\sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

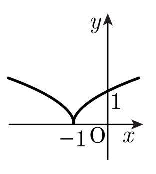
$$y=\sqrt{2(x-a)+1}+2+b$$
$$=\sqrt{2x-2a+1}+2+b$$

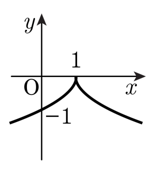
이 식이 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a=2,\ -2a+1=b,\ 2+b=c$
따라서, $a=2,\ b=-3,\ c=-1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c=-2$

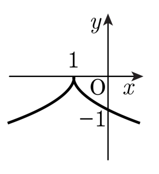
3. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$ 의 그래프를 구하면?

①


②


③


④


⑤


해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$
$x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로
3번이 정답임.

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432\end{aligned}$$

5. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(385+385)=385$

6. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 값은?

① -12　② -6　③ 6　④ 12　⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은
$-\sqrt[4]{16} = -2 \quad \therefore\ a = -2$
-27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3 = -27, \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$
이때, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.
$\therefore\ b = -3$
$\therefore ab = (-2) \times (-3) = 6$

7. 양의 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

① $\sqrt[10]{a}$　② $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$　③ 1　④ $\dfrac{1}{\sqrt[15]{a}}$　⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}}$$

8. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$

$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$

9. $a,\ x,\ y$가 양의 실수이고 $A = \log_a \dfrac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \dfrac{y^2}{x^3}$일 때, $3A + 2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \dfrac{1}{x^5}$　② $\log_a \dfrac{1}{y^5}$　③ $\log_a \dfrac{1}{xy}$
④ $\log_a \dfrac{x^5}{y^5}$　⑤ $\log_a \dfrac{x^5}{y^7}$

해설

$3A + 2B$
$= 3(2\log_a x - 3\log_a y) + 2(2\log_a y - 3\log_a x)$
$= -5\log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$

10. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(20^x) = \dfrac{1}{x} - \log_3 5$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　② 3　③ $2\log_3 2$
④ $2\log 35$　⑤ $1+\log_3 2$

해설

$20^x = 3$이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

11. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2,\ g(x) = \frac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

12. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_1 : a_4$는?(단, $a_1 \neq 0$이다.)

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4)$

$= (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2$

$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore\ 2a_1 = 3d$

$\therefore\ a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$

13. 표의 빈칸에 6 개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6 개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$\therefore 5+6+8+10+9+13=51$

14. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} - \frac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \ \frac{1}{150}S = 47$

15. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

16. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + n + \alpha$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 α의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + n + \alpha$에서

(i) $n = 1$일 때 $S_1 = a_1 = 2 + 1 + \alpha = 3 + \alpha$

(ii) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n + \alpha - \left\{2(n-1)^2 + (n-1) + \alpha\right\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

그런데 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$3 + \alpha = 4 \cdot 1 - 1$

$\therefore\ \alpha = 0$

17. 등비수열 $\sqrt{2}+1,\ 1,\ \sqrt{2}-1,\ 3-2\sqrt{2},\cdots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

① $(\sqrt{2}-1)^{98}$ ② $(\sqrt{2}-1)^{99}$ ③ $(\sqrt{2}-1)^{100}$
④ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{90}$ ⑤ $2(\sqrt{2}-1)^{90}$

해설

공비를 r 이라 하면 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ a_n=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_{100}&=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99}\\&=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98}\\&=(\sqrt{2}-1)^{98}\end{aligned}$$

18. 서로 다른 세 실수 9, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, 9, b는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{45}{2}$ ② $-\frac{48}{2}$ ③ $-\frac{41}{2}$ ④ $-\frac{39}{2}$ ⑤ $-\frac{37}{2}$

해설

서로 다른 세 실수 9, a, b가 등차수열을 이루므로

$a=\frac{9+b}{2}$ ······㉠

세 수 a, 9, b가 등비수열을 이루므로

$9^2=ab$ ····㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$81=\frac{9+b}{2}\cdot b$, $b^2+9b-162=0$

$(b+18)(b-9)=0$

$\therefore b=-18$ 또는 $b=9$

즉, $b=-18$일 때 $a=-\frac{9}{2}$이고, $b=9$일 때 $a=9$

이때, a, b는 서로 다른 실수이므로

$a=-\frac{9}{2}$, $b=-18$

$\therefore a+b=-\frac{45}{2}$

19. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n$ 이라 할 때, $a_1 = 1,\ S_n = a_{n+1} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{11} 의 값은?

① $1-2^7$ ② $1-2^8$ ③ $1-2^9$
④ $1-2^{10}$ ⑤ $1-2^{11}$

해설

$S_n = a_{n+1} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots$ ㉠
$S_{n-1} = a_n + (n-1)(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \cdots$ ㉡
㉠−㉡을 하면 $a_n = a_{n+1} - a_n + 1$
$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$
양변에 -1을 더하여 정리하면 $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$
즉, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_2 - 1$, 공비가 2인 등비수열 이므로
$a_n - 1 = (a_2 - 1) \cdot 2^{n-2}(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$S_1 = a_2 + 1$ 이고, $S_1 = a_1 = 1$ 이므로 $a_2 = 0$
따라서, $a_n = 1 - 2^{n-2}(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ 이므로
$a_{11} = 1 - 2^9$

20. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$
$= \sum_{k=1}^{3}(a_k + 2a_k + 1) - \sum_{k=1}^{3}(a_k^2 - 2a_k + 1)$
$= 4\sum_{k=1}^{3} a_k = 4(3^2 + 2 \times 3) = 60$

21. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{10}{11}$ ④ $\dfrac{20}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\dfrac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{20}{11}$

22. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot1=3$이므로 등식이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$①이다.
> ①의 양변에 $2k+3$를 더하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
> 이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.
> 따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$
④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

23. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$\log_{10} 275 = \log_{10}^{25\times 11} = 2\log_{10}^{5} + \log_{10}^{11}$
$= 2(1 - \log_{10}^{2}) + \log_{10}^{11}$
$= 2(1 - 0.301) + 1.041$
$= 2.439$
소수 셋째 자리에서 반올림하면 2.44

24. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{18}$　④ $\frac{1}{36}$　⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$

$6xy = 1 \quad \therefore \ y = \frac{1}{6x}$

$x = 3$ 이므로 $y = \frac{1}{18}$

25. 매월 초에 일정한 금액을 월이율 1%, 한 달마다 복리로 적립하여 5년 후에 2000만원을 만들려고 한다. 매달 얼마씩 적립해야 하는가?(단, $1.01^{60} = 1.8$로 계산하고, 천 원 단위에서 반올림한다.)

① 22만원　② 24만원　③ 25만원
④ 27만원　⑤ 28만원

해설

매월 초에 a원씩 월이율 1%, 한 달마다 복리로 5년 동안 적립하여 2000만원을 만들어야 하므로

$a(1+0.01)+a(a+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{60}=20000000$

$\dfrac{a(1+0.01)\left\{(1+0.01)^{60}-1\right\}}{(1+0.01)-1}=20000000$

$=\dfrac{1\times 1.01\times(1.8-1)}{0.01}=20000000$

$80.8a=20000000$

$\therefore\ a \fallingdotseq 250000$

따라서 매월 적립해야 할 금액은 25만원이다.

26. 다음과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 나열되어 있을 때, 제 10행의 마지막 $\square$안에 들어갈 수는?

1행 1 2행 2 3 3행 4 5 6 4행 7 8 9 10 5행 11 12 13 14 15 ⋮ 10행 ············ $\square$

① 55 ② 60 ③ 65 ④ 70 ⑤ 75

해설

나열된 자연수의 행을 군으로 생각하면
1, / 2, 3/ 4, 5, 6/ 7, 8, 9, 10/
제 10행의 가장 마지막에 들어갈 수는
(11군의 초항) -1이다.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array}$$

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$a_n = 1 + \dfrac{(n-1)n}{2}$

$a_{11} = 1 + \dfrac{10 \cdot 11}{2} = 1 + 55 = 56$

$\therefore$ $\square$안에 들어갈 수$= 55$

27. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $P_n(a_n)$과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$일 때, 점 P_n의 좌표 a_n은?

① $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
② $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
③ $\frac{25}{6}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$
④ $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$
⑤ $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+3a_n}{2+3}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{3}{5}b_n$

이때, $a_2=5,\ a_1=0$이므로 $b_1=a_2-a_1=5$

$\therefore b_n=b_1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$

$=\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

28. $2^x = 3^y = 6^z$ 일 때, $6^{\frac{z}{x}-\frac{z}{y}}$ 의 값은?(단, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$)

① -1　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

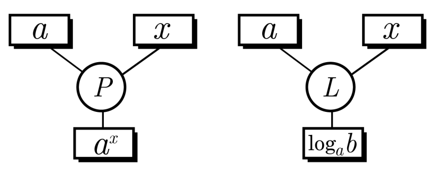
$2^x = 3^y = 6^z$ 에서

$2^x = 6^z,\ (2^x)^{\frac{1}{x}} = (6^z)^{\frac{1}{x}} \quad \therefore\ 6^{\frac{z}{x}} = 2$

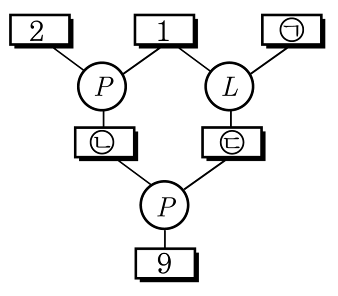
$3^y = 6^z,\ (3^y)^{\frac{1}{y}} = (6^z)^{\frac{1}{y}} \quad \therefore\ 6^{\frac{z}{y}} = 3$

$\therefore\quad 6^{\frac{z}{x}-\frac{z}{y}} = 6^{\frac{z}{x}} \div 6^{\frac{z}{y}} = 2 \div 3 = \frac{2}{3}$

29. a^x과 $\log_a b$를 다음과 같이 나타내었다.



이때, 다음의 ㉠에 알맞은 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

㉡ $= 2^4$ ㉢ $= \log_4$㉠

㉡$^{㉢} = 9$

$16^{\log_4 ㉠} = 9$

㉠$^{\log_4 16} = 9$

㉠$^2 = 9$

㉠ $= 3$

30. 이차방정식 $x^2-8x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)+\log_2\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)=k$일 때, 2^k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 25

해설

두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=1$이고,

$\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)$

$=\log_2\left(\alpha\beta+4+4+\frac{16}{\alpha\beta}\right)$

$=\log_2 25=k$

$\therefore\ 2^k=2^{\log_2 25}=25$

31. $\sqrt{17+\sqrt{288}}$의 소수 부분을 x라 할 때,
$\sqrt{\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$의 값을 구하면?

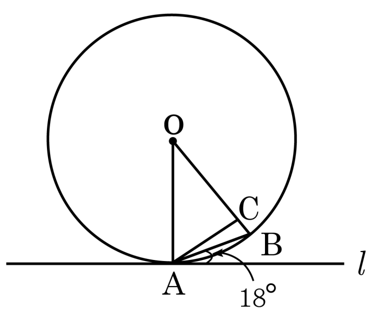
① $\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{3}+1$ ③ $\sqrt{2}-1$
④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-2$

해설

$\sqrt{17+\sqrt{288}}$
$=\sqrt{17+2\sqrt{72}}$
$=\sqrt{9}+\sqrt{8}$ $(\leftarrow 17=9+8,\ 72=9\times 8)$
$=3+2\sqrt{2}$ $(\leftarrow \sqrt{2}=1.4\times\times)$
$=5.8\times\times$ 이므로 소수부분은 $3+2\sqrt{2}-5$이다.
$\therefore\ x=2\sqrt{2}-2\ \ \therefore x+2=2\sqrt{2}$
또, $x^2+4x+4=(x+2)^2$이므로
$x^2+4x=(x+2)^2-4=(2\sqrt{2})^2-4=4$
따라서 준식에 $x+2=2\sqrt{2}$
$x^2+4x=4$를 대입시키면

$$\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$
$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

32. 원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이다. 선분 OB 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는?



① 68°　② 72°　③ 76°　④ 80°　⑤ 84°

해설

접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이므로 $\angle AOC = 36°$이다.
$\angle OAC = \alpha$, $\angle ACO = \beta$라 하면, $\alpha + \beta = 144°$이고,
가장 긴 변이 선분 OA이므로 가장 큰 각은 β이다.
(i) $36°$, α, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$2\alpha = \beta + 36° = (144° - \alpha) + 36° = 180° - \alpha$
$\alpha = 60°$, $\beta = 84°$
(ii) α, $36°$, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$2(\alpha + \beta) = 72°$가 되므로 모순이다.
(i), (ii)에 의해 $\beta = 84°$

33. 20개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$은 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 a_{20} = 16$
> (나) $\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1} (n = 1, 2, 3, \cdots, 18)$

20개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$을 모두 곱한 값을 P라 할 때, $\log_4 P$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1}$ 이므로

$\log a_n a_{n+2} = 2\log a_{n+1} = \log a_{n+1}^2$

$\therefore\ a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$

따라서, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이 때, 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 a_{20} = a \cdot ar^{19} = a^2 r^{19} = 16$

$P = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{19} = a^{20} r^{1+2+3+\cdots+19}$

$= a^{20} r^{190} = (a^2 r^{19})^{10} = 16^{10} = (4^2)^{10} = 4^{20}$

$\therefore\ \log_4 P = \log_4 4^{20} = 20$