1. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

2. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

3. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x+3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}$

$= \sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8+2\sqrt{12}} + \sqrt{8-2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

4. 다음 방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$$

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ 에서 $x^2+x=X$ 라 하면
$X^2-8X+12=0$, $(X-2)(X-6)=0$
$\therefore$ $X=2$ 또는 $X=6$
(i) $X=2$ 일 때, $x^2+x=2$ 에서
$x^2+x-2=0$,
$(x-1)(x+2)=0$
$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=6$ 일 때, $x^2+x=6$ 에서
$x^2+x-6=0$,
$(x+3)(x-2)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는
$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
따라서, 해가 아닌 것은 ③

5. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

6. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

7. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

8. 삼차방정식 $x^3+ax+16=0$ 이 중근 α 와 다른 실근 β 를 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -12　② -14　③ -16　④ -18　⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\alpha+\beta=0,\ \beta=-2\alpha$

$\alpha\times\alpha\times\beta=-16$ 에서

$-2\alpha^3=-16,\ \alpha=2,\ \beta=-4$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

일차항의 계수 $=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha=a$

$\therefore\ a=-12$

9. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{-2}{1}=-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

10. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

11. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2(\text{cm})$

12. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근일 때, α^2-2도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

α 는 $x^3-3x+1=0$ 의 근이므로 (가) $f(x)=x^3-3x+1$ 이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $=0$ 따라서, α^2-2 도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3-3\alpha+1=0$

② (나) $(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

③ (다) $\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$

④ (라) $(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$

⑤ (마) $0\cdot 2$

해설

α는 $x^3-3x+1=0$의 근이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$
$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$
$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\cdot(-2)=0$
따라서 α^2-2도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 근이다.

13. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ $\cdots\cdots$㉠

$\{9-3b+a=0\}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

14. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$
$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$
$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$
$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$
$\therefore 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$
연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$
$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면
$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$
$\therefore\ k=4,\ a=2,\ b=0$

15. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$　　② $-\dfrac{3}{4}$　　③ -1　　④ $-\dfrac{3}{2}$　　⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$, $\alpha+\beta=-2-\gamma$를 이용하면

(주어진 식)$= \dfrac{-2-\alpha}{\alpha} + \dfrac{-2-\beta}{\beta} + \dfrac{-2-\gamma}{\gamma}$

$= -2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)-3$

$= -2\left(\dfrac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)-3 = -\dfrac{3}{2}$

16. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 하고
$z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$라 할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하면?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$에서
$w,\ \overline{w}$는 $x^2 + x + 1 = 0$의
두 근이므로 근과 계수의 관계에서
$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$
또한, $z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$에서 $\overline{z} = \dfrac{\overline{w} + 1}{2\overline{w} + 1}$이므로

$$z\overline{z} = \frac{w+1}{2w+1} \times \frac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$$
$$= \frac{w\overline{w} + (w + \overline{w}) + 1}{4w\overline{w} + 2(w + \overline{w}) + 1} = \frac{1-1+1}{4-2+1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0$, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ w^2 + w + 1 = 0$, $w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$라 하자

$$z = \frac{w+1}{2w+1} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$
$$z\overline{z} = \frac{3-\sqrt{3}i}{6} \times \frac{3+\sqrt{3}i}{6} = \frac{9+3}{36} = \frac{1}{3}$$

17. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60　② 65　③ 68　④ 72　⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \;\; b^3 = 1 \;\; c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \;\; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

① 에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \;\; 21b + 44 = 65$

18. 방정식 $x^5 = 1$의 허근을 ω라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$일 때 $\alpha^2 + \alpha$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}^2 = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}^2\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0,\ \alpha^2 + \alpha = 1$

19. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
(ⅰ) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
(ⅱ) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
w는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$
$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$

20. 다음과 같은 식의 변형을 이용하여 알 수 있는 것은? (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수를 나타낸다.)

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d} = \overline{az}^3 + \overline{bz}^2 + \overline{cz} + \overline{d}$$
$$= \overline{az}^3 + \overline{b}\overline{z}^2 + \overline{cz} + \overline{d}$$
$$= \overline{a}(\overline{z})^3 + \overline{b}(\overline{z})^2 + \overline{c}(\overline{z}) + \overline{d}$$

① z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

② z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

③ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근과 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근은 같다.

④ $\overline{z}$ 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

⑤ $\overline{z}$ 가 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

해설

z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면,
$az^3+bz^2+cz+d=0$
$\overline{ax^3+bz^2+cz+d}$
$= \overline{az}^3 + \overline{bz}^2 + \overline{cz} + \overline{d}$
$= \overline{a}(\overline{z})^3 + \overline{b}(\overline{z})^2 + \overline{c}(\overline{z}) + \overline{d}$
$= 0$ 이므로
$\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.