1. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$
② $2a+b \le a+2b$
③ $2a+b > a+2b$
④ $2a+b \ge a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설
$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$
$\therefore 2a+b > a+2b$

2. $x > y > 0$인 실수 x, y에 대하여 $\frac{x}{1+x}$, $\frac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$

$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

3. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$ $B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$　　② $A \le B$　　③ $A > B$

④ $A \ge B$　　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \ge 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \ge 0$이므로 $A \ge B$

4. $x > 0,\ y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y},\ \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0,\ \sqrt{2(x+y)} > 0$

이 때 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y)$

$= -(x - 2\sqrt{xy} + y)$

$= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \le 0$

이므로 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \le \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \le \sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, 즉 $x = y$일때성립)

5. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$
② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$
③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$
④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$
⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 = (x+1) - (y+1)$$
$$= x - y > 0$$
$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

6. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2)$
> $= 2([\text{다}]) \geq 0$
> (단, 등호는 $[\text{라}] \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

7. a, b가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a|+|b| \geqq |a+b|$ ㉡ $|a+b| \geqq |a-b|$

㉢ $|a-b| \geqq |a|-|b|$ ㉣ $|a+b| \geqq ||a|-|b||$

① ㉠ ② ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a|\cdot|b|$

$|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because |a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$

$||a|-|b||^2 = a^2-2|a||b|+b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

8. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16　　② 17　　③ 18　　④ 19　　⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4}\geq\sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore\ \frac{1}{16}\geq\frac{1}{xy}$

따라서 $xy\geq 16$이므로 xy의 최솟값은 16

9. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

a, b는 양수이므로

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$

$=5+ab+\frac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$

$=5+4=9$

$\therefore$ 최솟값은 9

10. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

11. $2a+3b=12$를 만족하는 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

$12=2a+3b\geq 2\sqrt{6ab}$
$6\geq \sqrt{6ab},\ 36\geq 6ab \quad \therefore 6\geq ab$

12. 양의 실수 $x,\ y$에 대하여 $2x+y=1$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$　② $3\sqrt{6}$　③ $4\sqrt{6}$　④ $5\sqrt{6}$　⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$x>0, y>0$이므로 $2x+y=1\ge 2\sqrt{2xy}$

$\frac{1}{2}\ge \sqrt{2xy}$

$\therefore \frac{1}{8}\ge xy$

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\ge 2\sqrt{\frac{3}{xy}}$ 이므로

$\frac{3}{xy}$ 이 최소가 되려면 xy가 최대가 되어야 하므로 $xy=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}\ge 2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$

13. $3a+4b=1$ 일 때, $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}$ 의 최솟값을 구하면?(단, $a>0,\ b>0$)

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

$a>0,\quad b>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$3a+4b=1\geq 2\sqrt{12ab}$

$\frac{1}{2}\geq\sqrt{12ab},\ \frac{1}{48}\geq ab$

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}$

$ab=\frac{1}{48}$ (최대) 일 때 $\sqrt{\frac{12}{ab}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore\ \frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{\frac{1}{48}}}=2\cdot 2\cdot 12=48$

14. $a > 1$ 일 때, $a + \dfrac{4}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + \dfrac{4}{a-1} = a - 1 + \dfrac{4}{a-1} + 1$

산술기하조건을 이용하면

$a - 1 + \dfrac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \dfrac{4}{a-1}} = 4$

$\therefore$ 최솟값은 $4 + 1 = 5$

15. $x > 2$ 일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$x-2=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고 $x=t+2$
따라서 주어진 식을 t 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x+\frac{1}{x-2} &= 4(t+2)+\frac{1}{t} \\ &= 4t+\frac{1}{t}+8 \\ &\geq 2\sqrt{4t+\frac{1}{t}}+8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t=\dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

16. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원　② 7000원　③ 8000원
④ 9000원　⑤ 10000원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

(총 비용) $= 250\left(\frac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$

$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$

$\geq 2\sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$

$= 2 \times 5000 - 1000$

$= 10000 - 1000 = 9000$

17. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$　② $16\,\mathrm{m}^2$　③ $25\,\mathrm{m}^2$　④ $36\,\mathrm{m}^2$　⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

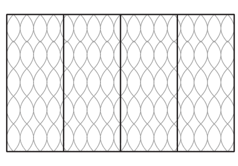
$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

18. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$ ② $70\mathrm{m}^2$ ③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$ ⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab\leq 60^2$

$\therefore\ ab\leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

$S=ab\leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

19. 빗변의 길이가 5 인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$ ② $5+5\sqrt{2}$ ③ 25

④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면

$a^2+b^2=25$ 이고

$a^2+b^2 \geq 2ab$ 에서 $25 \geq 2ab$

$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$ 이므로

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 일 때

둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

20. x, y가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$일 때 $x + 3y$의 최댓값은?

① 5　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
이 때, $x^2 + y^2 = 10$이므로
$100 \geq (x + 3y)^2$
$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
(단, 등호는 $x = \dfrac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

21. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

22. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$

② $M=3, m=-3$

③ $M=6, m=0$

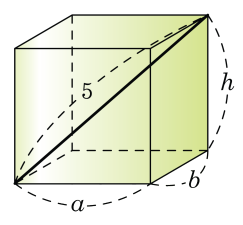
④ $M=6, m=-6$

⑤ $M=6, m=-12$

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

23. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ $20\sqrt{3}$　④ $25\sqrt{5}$　⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

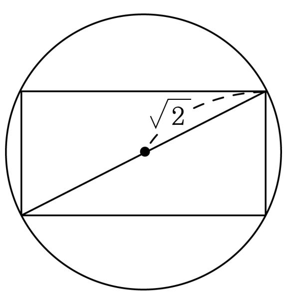
$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

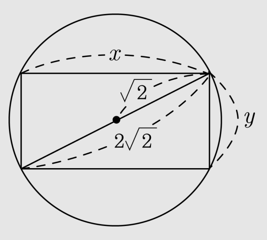
: $20\sqrt{3}$

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x > 0,\ y > 0)$ 라고 하면

$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x + 2y)^2 \le (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x + 2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8 이다.