

1. $a > b > 0$ 일 때, 다음 $2a + b$, $a + 2b$ 의 대소를 비교하면?

① $2a + b < a + 2b$

② $2a + b \leq a + 2b$

③ $2a + b > a + 2b$

④ $2a + b \geq a + 2b$

⑤ $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

2. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$

② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$

③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$

⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \text{ 이라 하면}$$

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

$$\text{따라서 } \therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$$

3. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$

$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

4. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned}\text{이 때 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{이므로 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore & (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{2(x+y)} \\ & (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} = \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립})\end{aligned}$$

5. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

6. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 이므로 $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
 ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
 ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

7. a, b 가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a| + |b| \geq |a + b|$

㉡ $|a + b| \geq |a - b|$

㉢ $|a - b| \geq |a| - |b|$

㉣ $|a + b| \geq ||a| - |b||$

① ㉠

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$

$|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because |a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$||a| - |b||^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

8. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여 xy 의 최솟값은?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서 $xy \geq 16$ 이므로 xy 의 최솟값은 16

9. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

10. $a > 0$, $b > 0$ 일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

①

16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

11. $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

$$6 \geq \sqrt{6ab}, \quad 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$

12. 양의 실수 x, y 에 대하여 $2x+y=1$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$

② $3\sqrt{6}$

③ $4\sqrt{6}$

④ $5\sqrt{6}$

⑤ $6\sqrt{6}$

해설

$$x > 0, y > 0 \text{ 이므로 } 2x + y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$\therefore \frac{1}{8} \geq xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{3}{xy}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{xy} \text{ 이 최소가 되려면 } xy \text{가 최대가 되어야 하므로 } xy = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \geq 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$$

13. $3a + 4b = 1$ 일 때, $\frac{4}{a} + \frac{3}{b}$ 의 최솟값을 구하면?(단, $a > 0, b > 0$)

① 12

② 24

③ 36

④ 48

⑤ 60

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$3a + 4b = 1 \geq 2\sqrt{12ab}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{12ab}, \frac{1}{48} \geq ab$$

$$\frac{4}{a} + \frac{3}{b} \geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}$$

$ab = \frac{1}{48}$ (최대) 일 때 $\sqrt{\frac{12}{ab}}$ 는 최소가 된다.

$$\therefore \frac{4}{a} + \frac{3}{b} \geq 2\sqrt{\frac{12}{\frac{1}{48}}} = 2 \cdot 2 \cdot 12 = 48$$

14. $a > 1$ 일 때, $a + \frac{4}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$a + \frac{4}{a-1} = a - 1 + \frac{4}{a-1} + 1$$

산술기하조건을 이용하면

$$a - 1 + \frac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \frac{4}{a-1}} = 4$$

$\therefore$ 최솟값은 $4 + 1 = 5$

15. $x > 2$ 일 때 $4x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고 $x = t + 2$

따라서 주어진 식을 t 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립)

16. 길이가 10 인 쇄파이프를 n 등분 (같은 크기) 으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇄파이프 1 개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇄파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇄파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000 원

② 7000 원

③ 8000 원

④ 9000 원

⑤ 10000 원

해설

쇄파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

$$(\text{총 비용}) = 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1)$$

$$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$$

$$= 2 \times 5000 - 1000$$

$$= 10000 - 1000 = 9000$$

17. 길이가 16 m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2

② 16 m^2

③ 25 m^2

④ 36 m^2

⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x + y) = 16 \quad x + y = 8$$

산술기하평균을 사용하면,

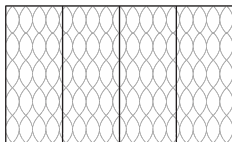
$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$$\therefore \text{넓이의 최대값} : 16(\text{m}^2)$$

18. 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

19. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

둘레의 길이는 $5 + 5\sqrt{2}$

20. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

이 때, $x^2 + y^2 = 10$ 이므로

$$100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

(단, 등호는 $x = \frac{y}{3}$ 일 때 성립)

따라서 최댓값은 10이다.

21. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$

② 3

③ $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$$13 \geq (x + y)^2 \text{ 이므로}$$

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$$\therefore x + y \text{의 최댓값은 } \sqrt{13}$$

22. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

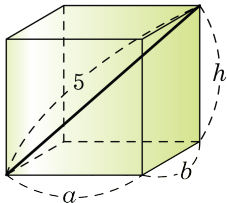
$$\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$$

$$\therefore M = 6, m = -6$$

23. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$$a^2 + b^2 + h^2 = 25$$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

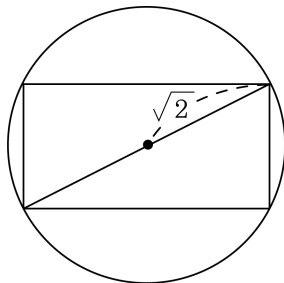
$$(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$$

$$25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$$

$$\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값
 : $20\sqrt{3}$

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6

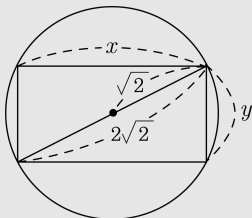
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y ($x > 0, y > 0$) 라고 하면

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.