1. 첫째항이 -4, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설

$$S_{17} = \frac{17\left\{2 \cdot (-4) + (17-1) \cdot 3\right\}}{2} = \frac{680}{2} = 340$$

2. 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 끝항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 항의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_n = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2}$

$n - 1 = 2$

$n = 3$

3. $\sum_{k=1}^{5} a_k = 20$, $\sum_{k=1}^{5} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k - 1)$ 의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

해설

(주어진 식)
$= 2\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k - \sum_{k=1}^{5} 1$
$= 2 \cdot 20 - 5 - 5$
$= 30$

4. 제3 항이 11, 제9 항이 29 인 등차수열의 20 번째 항은?

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 5,\ d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3 이므로 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$

따라서 20 번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

5. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α, β의 등차중항은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{n}{2n+1}$
④ $\frac{n}{n+2}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

준 식) $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\} + \cdots +$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{n}{2n+1}$

7. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$　　② $a_{20}-a_{10}$　　③ $a_{21}-a_9$

④ $a_{21}-a_{10}$　　⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로

$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$

$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$

$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots b_9)$

$= a_{21} - a_{10}$

8. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9\log_3 2$ ② $10\log_3 2$ ③ $11\log_3 2$

④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

9. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}, 10$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20}, 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{20}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{209}{189}$ ② $\dfrac{11}{189}$ ③ $\dfrac{209}{11}$ ④ $\dfrac{189}{209}$ ⑤ 1

해설

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}, 10$의 공차를 p라 하면

$1+11p=10 \Rightarrow p=\dfrac{9}{11}$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 10$의 공차를 q라 하면

$1+21q=10 \Rightarrow q=\dfrac{9}{21}$

$\therefore\ \dfrac{a_{10}-a_1}{b_{20}-b_1}=\dfrac{9p}{19q}=\dfrac{9\cdot\dfrac{9}{11}}{19\cdot\dfrac{9}{21}}=\dfrac{189}{209}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\dfrac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{39+\sqrt{380}}}$의 값을 a라 할 때, 자연수 n에 대하여 $n<\alpha<n+1$이 성립한다. 이때, n의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\dfrac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{39+\sqrt{380}}}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{20}-\sqrt{19})$

$=\sqrt{20}-1$

$4<\sqrt{20}<5$이므로 $3<\sqrt{20}-1<4$

$\therefore n=3$

11. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right] = \left[\frac{2^1}{10}\right] + \left[\frac{2^2}{10}\right] + \left[\frac{2^3}{10}\right] + \left[\frac{2^4}{10}\right] + \cdots + \left[\frac{2^{10}}{10}\right]$

$= 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 12 + 25 + 51 + 102 = 200$

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된다. 자연수의 집합에서 정의되는 함수 $f(n)$을 $f(n) = a_n$이라 할 때, 함수 $f(n)$의 주기는?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = \dfrac{2+1}{3} = 1,\ a_4 = \dfrac{1+1}{2} = 1,\ a_5 = \dfrac{1+1}{1} = 2,$

$a_6 = \dfrac{2+1}{1} = 3,\ a_7 = \dfrac{3+1}{2} = 2,\ a_8 = \dfrac{2+1}{3} = 1,\ a_9 = \dfrac{1+1}{2} = 1,\ a_{10} = \dfrac{1+1}{1} = 2, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 반복된다.

따라서 함수 $f(n) = a_n$의 주기는 5이다.

13. 집합 $A = \{x | x = 2^a \cdot 5^b,\ a,\ b$는 10 이하의 음이 아닌 정수$\}$의 모든 원소의 합은?

① $(2^{10}-1)(5^{10}-1)$　② $(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

③ $\frac{1}{2}(2^{10}-1)(5^{10}-1)$　④ $\frac{1}{2}(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

⑤ $\frac{1}{4}(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

해설

집합 A의 원소는 $2^a \times 5^b$의 꼴로 표현되고, $a,\ b$는 10이하의 음이 아닌 정수이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 $2^{10} \times 5^{10}$의 양의 약수의 총합과 같다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{10})$

$= \dfrac{1 \cdot (2^{11}-1)}{2-1} \times \dfrac{1 \cdot (5^{11}-1)}{5-1}$

$= \dfrac{1}{4}(2^{11}-1)(5^{11}-1)$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$은 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 등차수열이다.

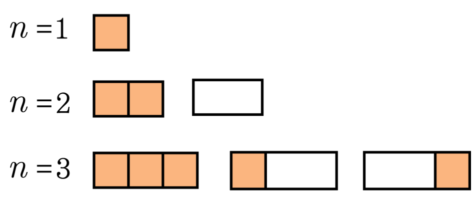
① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$
$a_1 = S_1 = 4$이므로
$a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$
㉠ $a_3 = 36$
㉡ $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.
㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$인 등차수열이다.

15. 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1인 직사각형을 가로와 세로의 길이가 모두 1인 타일과 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$인 경우는 1가지, $n = 2$인 경우는 2가지, $n = 3$인 경우는 3가지가 존재한다. 가로의 길이 n에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_{10}의 값을 구하여라.
(단, n은 자연수이다.)



▶ 답: ____________ 가지

▷ 정답: 89가지

해설

a_n은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1인 경우와 2인 경우 2가지가 있으므로
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$가 성립한다. 그러므로
$a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$
즉, 가로의 길이가 10인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89가지이다.