1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2 인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

3. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115　② 270　③ 326　④ 445　⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{20} = \dfrac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$

4. $a_1 = 23,\ a_2 = 20$ 이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -115$ 일 때, 자연수 k 의 값은?

① 43 ② 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$ 이므로
$a_n = 23 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 26$
$-3k + 26 = -115$ 에서 $-3 = -141$
$\therefore\ k = 47$

5. 수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$를 만족시킨다. $a_1 = 3$, $a_5 = 25$일 때, a_{33}의 값은?

① 175　② 176　③ 177　④ 178　⑤ 179

해설

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = 3$이므로 $a_5 = 3 + 4d = 25$ $\therefore d = \frac{11}{2}$

$\therefore a_{33} = 3 + 32 \times \frac{11}{2} = 3 + 176 = 179$

6. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 일반항 a_n 은?

① 2^{n-1}　　② $2^{n-1} + n - 1$　　③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$　　⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$ 을 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2^2 \\ &\ \vdots \\ +)\ \underline{a_n} &\underline{= a_{n-1} + 2^{n-1}} \\ a_n &= a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= a_1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

7. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-5)$

$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

9. $a_1 = 110$인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

11. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_7 의 값은?

① 216 ② 317 ③ 365 ④ 509 ⑤ 1021

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 3$ 에서
$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$
이때, 수열 $\{a_n + 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 3$, 공비가 2 인 등비수열이므로
$a_n + 3 = (a_1 + 3) \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$
따라서, $a_n = -3 + 5 \cdot 2^{n-1}$ 이므로
$a_7 = -3 + 5 \cdot 2^6 = 317$

12. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

13. $a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geq 1)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$의 값은?

① $2^{10} + 6$ ② $2^{10} + 0$ ③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$ ⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$꼴로 변형하면

$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$

즉, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \dfrac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$

$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$

14. $a_1 = 1,\ a_{2n} = a_n + 2,\ a_{2n+1} = a_n - 3$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{30} 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$a_{2n} = a_n + 2,\ a_{2n+1} = a_n - 3$

$a_{30} = a_{15} + 2 = (a_7 - 3) + 2 = a_7 - 1$

$= (a_3 - 3) - 1 = a_3 - 4 = (a_1 - 3) - 4$

$= a_1 - 7 = -6$

15. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의될 때, $a^{2014}a^{2015}a^{2016}$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = -1,\ a_4 = 2,\ a_5 = \dfrac{1}{2},\ a_6 = -1,\ \cdots$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 $2,\ \dfrac{1}{2},\ -1$이 반복되는 수열이고

$a^{2014},\ a^{2015},\ a^{2016}$은 연속한 세 항의 곱이므로

$2 \times \dfrac{1}{2} \times (-1) = -1$

16. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = \dfrac{1}{63}$을 만족하는 n의 값은?

① 9　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 5

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$ 에서 양변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{a_n} + 1$

이때, $\dfrac{1}{a_n} = b_n$이라 하면 $b_1 = 1,\ b_{n+1} = 2b_n + 1$

그러면, $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$이므로

$b_n + 1 = (b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore\ b_n = 2^n - 1$

따라서 $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$이므로 $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1} = \dfrac{1}{63}$에서 $n = 6$이다.

17. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, 즉 $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1 인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

18. 어떤 세포의 집합은 1시간이 지나면 세포 2개는 죽고 나머지는 각각 2배로 분열한다고 한다. 처음 세포의 개수가 7개일 때, n시간 후의 세포의 개수를 a_n이라 하면, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+1} = 2a_n - 7$

② $a_{n+1} = 2(a_n - 7)$

③ $a_{n+1} = a_n - 2$

④ $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

⑤ $a_{n+1} = 2a_n - 2$

해설

$a_1 = 2 \times (7 - 2) = 10$
$a_2 = 2 \times (a_1 - 2)$
$a_3 = 2 \times (a_2 - 2)$
$a_4 = 2 \times (a_3 - 2)$
$\vdots$
$a_n = 2(a_{n-1} - 2)$
$\therefore\ a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

19. $a_1 = b_1 = 1$이고 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2,\ b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)
인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 b_{10}의 값은?

① 37　　② 39　　③ 41　　④ 43　　⑤ 45

해설

$a_1 = 1$이고 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n - 1$

따라서, 수열의 일반항 b_n은 $n \ge 2$일 때

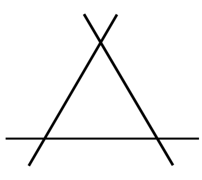
$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$

$= 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1)$

$= \dfrac{n^2 - 3n + 4}{2}$

$\therefore\ b_{10} = \dfrac{10^2 - 3 \times 10 + 4}{2} = 37$

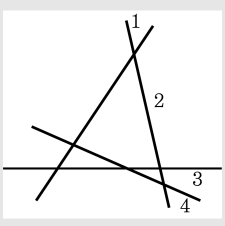
20. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n개의 직선이 있다. n개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$을 나타낸다. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설



n개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.
3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n+1$개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n+1)$이 성립한다.

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ $\dfrac{13}{4}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ $\dfrac{17}{4}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2 = \dfrac{1\cdot 3}{2^2}a_1$

$a_3 = \dfrac{2\cdot 4}{3^2}a_2$

$a_4 = \dfrac{3\cdot 5}{4^2}a_3$

$\vdots$

$\times)\ a_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\ a_{n-1}$

$\therefore\ a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$

$= \dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{n+1}{2n}\cdot a_1$

$a_1 = 5$를 대입하면 $a_n = \dfrac{5(n+1)}{2n}$

$\therefore a_{10} = \dfrac{5\cdot 11}{2\cdot 10} = \dfrac{11}{4}$

22. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_8 - a_7$의 값은?

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{64}$ ③ $\frac{1}{128}$ ④ $\frac{1}{256}$ ⑤ $\frac{1}{512}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

$(a_{n+1} - \alpha) = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$

$-\frac{1}{2}\alpha + \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$

$\therefore \{a_n - 2\}$는 초항이 -1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열

$\therefore a_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

$\therefore a_8 - a_7 = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + 2 - \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 2\right\}$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

23. $a_2 = 3a_1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_8 = 243$ 일 때, a_{15} 의 값은?

① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ 에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$ 이고 공비가 3 인 등비수열이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_1 \cdot 3^{k-1}$

$= a_1 + 2a_1 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$= a_1 + 2a_1 \dfrac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$

$a_8 = a_1 \cdot 3^7 = 243 = 3^5$ 에서 $a_1 = 3^{-2}$

$\therefore\ a_{15} = 3^{-2} \cdot 3^{14} = 3^{12}$

24. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

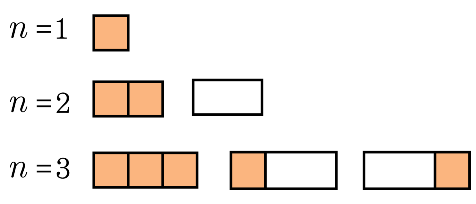
$\therefore\ 3a_1 + 5a_2 = 62$

$a_1,\ a_2$의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$이므로

$a_1 = 4,\ a_2 = 10$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 14$

25. 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1인 직사각형을 가로와 세로의 길이가 모두 1인 타일과 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$인 경우는 1가지, $n = 2$인 경우는 2가지, $n = 3$인 경우는 3가지가 존재한다. 가로의 길이 n에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_{10}의 값을 구하여라.
(단, n은 자연수이다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 89가지

해설

a_n은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1인 경우와 2인 경우 2가지가 있으므로
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$가 성립한다. 그러므로
$a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$
즉, 가로의 길이가 10인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89가지이다.

26. 비어 있는 물탱크에 물을 채우려고 한다. 첫째 날은 7L 의 불을 채우고 , 다음 날부터 전날 채운 물의 양의 $\frac{4}{3}$ 배보다 1L 적은 양을 채우기로 하였다. 열 번째 날 물탱크에 채우는 물의 양은?

① $4\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+3\text{L}$　② $4\left(\frac{3}{4}\right)^{9}+3\text{L}$　③ $4\left(\frac{3}{5}\right)^{9}+3\text{L}$
④ $4\left(\frac{4}{3}\right)^{10}+3\text{L}$　⑤ $4\left(\frac{5}{3}\right)^{10}+3\text{L}$

해설

첫째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_1 이라 하면 $a_1=7$
n 번째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_n 이라 하면

$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-1$

이때, $a_{n+1}-\alpha=\frac{4}{3}(a_n-\alpha)$ 라 하면 $-\frac{1}{3}\alpha=-1,\quad \alpha=3$

$\therefore a_{n+1}-3=\frac{4}{3}(a_n-3)$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$ 은 첫째항이 $a_1-3=7-3=4$, 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이므로

$a_n-3=4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\quad \therefore a_n=4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+3$

$\therefore a_{10}=4\left(\frac{4}{3}\right)^{10-1}+3=4\left(\frac{4}{3}\right)^{9}+3(\text{L})$

27. 20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$은 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 a_{20} = 16$
(나) $\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1} (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 18)$

20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$을 모두 곱한 값을 P라 할 때, $\log_4 P$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1}$ 이므로
$\log a_n a_{n+2} = 2\log a_{n+1} = \log a_{n+1}^2$
$\therefore\ a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$
따라서, $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
이 때, 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_1 a_{20} = a \cdot ar^{19} = a^2 r^{19} = 16$
$P = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{19} = a^{20} r^{1+2+3+\cdots+19}$
$= a^{20} r^{190} = (a^2 r^{19})^{10} = 16^{10} = (4^2)^{10} = 4^{20}$
$\therefore\ \log_4 P = \log_4 4^{20} = 20$

28. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ 이고, $a_{n+3} = a_n + 1\,(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 두 번째로 나오는 30 은 제 몇 항인가?

① 제 84 항　　② 제 85 항　　③ 제 86 항

④ 제 87 항　　⑤ 제 88 항

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$
$a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = 4, \cdots$
와 같이 진행되는 수열이다.
30 이 두번째로 나오는 것은
$3 \cdot (30 - 1) + 1$ 번째 이므로
제 88 항

29. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=51}^{100} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{100} - a_{50}$ ② $a_{101} - a_{50}$ ③ $a_{101} - a_{51}$
④ $a_{102} - a_{51}$ ⑤ $a_{102} - a_{52}$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

(i)
$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 - a_2 \\ a_2 &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \\ +)\ \underline{a_{100}} &\underline{= a_{102} - a_{101}} \\ \textstyle\sum_{k=1}^{100} a_k &= a_{102} - a_2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 - a_2 \\ a_2 &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \\ +)\ \underline{a_{50}} &\underline{= a_{52} - a_{51}} \\ \textstyle\sum_{k=1}^{50} a_k &= a_{52} - a_2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=51}^{100} a_k &= \textstyle\sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{50} a_k \\ &= (a_{102} - a_2) - (a_{52} - a_2) \\ &= a_{102} - a_{52} \end{aligned}$$

30. A, B두 그릇에 농도가 각각 10%, 20%인 소금물이 각각 $100\mathrm{g}$씩 들어 있다. A 그릇의 소금물 $25\mathrm{g}$을 덜어 B 그릇에 담아 잘 섞은 다음 B 그릇의 소금물 $25\mathrm{g}$을 다시 덜어 A 그릇에 담아 잘 섞는다. 이와 같은 작업을 n회 시행하였더니 두 그릇의 소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되었을 때, 자연수 n의 최솟값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

n회 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양은 $100\mathrm{g}$으로 동일하므로 소금의 양이 바로 농도가 된다.
시행 전 A, B두 그릇에 들어있는 소금의 양은 각각
$a_0 = 10\mathrm{g}$, $\mathrm{b}_0 = 20\mathrm{g}$
n회 시행 후 각 그릇에 남아 있는 소금의 양을 각각 a_n, b_n이라 하면

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \left(\frac{1}{4}a_n + b_n\right) \times \frac{1}{5}$$

즉, $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n \cdots$ ㉠

한편, 매 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양의 합은 변함이 없으므로

$$a_0 + b_0 = \cdots = a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$

$\therefore\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{4}{5}b_n \cdots$ ㉡

㉡ − ㉠에서 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3}{5}(b_n - a_n)$

한편, $a_1 = \frac{4}{5}a_0 + \frac{1}{5}b_0 = \frac{4}{5} \cdot 10 + \frac{1}{5} \cdot 20 = 12$

$$b_1 = \frac{1}{5}a_0 + \frac{4}{5}b_0 = \frac{1}{5} \cdot 10 + \frac{4}{5} \cdot 20 = 18$$

$$\therefore\ b_n - a_n = (b_1 - a_1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 6 \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n = 10\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되려면 소금의 양의 차가 0.05 이하가 되어야 하므로

$$10\left(\frac{3}{5}\right)^n \le 0.05,\quad \left(\frac{3}{5}\right)^n \le \frac{1}{200}$$

양변에 로그를 취하면

$$n(\log 3 - \log 5) \le -\log 2 - 2$$

$$n \ge \frac{-\log 2 - 2}{\log 3 - \log 5} = \frac{-0.3010 - 2}{0.4771 - 0.699} = 10.37(\because \log 5 = 1 - \log 2)$$

따라서 만족하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.