

1. 함수 $y = \frac{2}{x+3} - 4$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = a, y = b$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -7 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 7

해설

점근선이 $x = -3, y = -4$ 이므로 $a - b = 1$

2. 분수함수 $y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1, y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1, y=6$ 이므로

$$y = \frac{6(x-1)+9}{x-1} = \frac{9}{x-1} + 6$$

$$\therefore a = -1, b = 6$$

$$\therefore a + b = 5$$

3. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a, y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

점근선은 $x = -1, y = 3$

$$a = -1, b = 3$$

$$a + b = 2$$

4. 다음 보기 중 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{x}{x+1}$ ㉡ $y = \frac{2-x}{x-1}$ ㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이다.

$$\textcircled{1} y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1$$

$$\textcircled{2} y = \frac{2-x}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1$$

$$\textcircled{3} y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 2$$

따라서, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

5. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y = \frac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y = \frac{1}{x}$

② $y = \frac{2}{x}$

③ $y = x + \frac{1}{x}$

④ $y = x + \frac{2}{x}$

⑤ $y = 2x + \frac{2}{x}$

해설

$2x^2 = (x+1)(2x-2) + 2$ 이므로

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = (2x-2) + \frac{2}{x+1}$$

$$= 2(x+1) + \frac{2}{x+1} - 4$$

$$\therefore y+4 = 2(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

이것은 $y = 2x + \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축

방향으로 -1 , y 축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

6. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 (2, 3) 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{1}$$

$f^{-1}(2) = 3$ 에서 $f(3) = 2$ 이므로

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \therefore 3a+b = 4 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \therefore ab = 1$$

7. 분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)

- ① $\{y \mid y < 0$ 또는 $y > 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 0$ 또는 $y \geq 2\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$ ④ $\{y \mid y < 1$ 또는 $1 < y \leq 2\}$
 ⑤ $\{y \mid y < 1$ 또는 $y \geq 2\}$

해설

분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \frac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나

므로

$$2 = \frac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$$

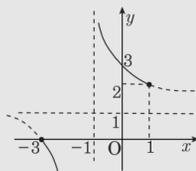
$$\therefore y = \frac{x+3}{x+1}$$

따라서 $-3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{ 의 그래프는}$$

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$$\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$$



8. 함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 (1,2)를 지나고 $x = 3, y = 1$ 을 점근선으로 할 때, 상수 a, b, c 에 대해서 $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점근선이 $x = 3, y = 1$ 이므로

$a = -3, b = 1$ 이다.

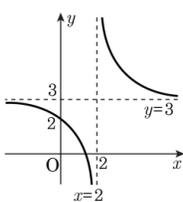
그리고 점 (1,2)를 지나므로,

$$2 = \frac{1+c}{1-3}, c = -5$$

$$\therefore a - b - c = 1$$

9. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2, y=3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① -6 ② -4 ③ -3
 ④ 2 ⑤ 7



해설

점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점(0, 2)를 지나므로 $\frac{b}{c} = 2$

$\therefore b = -4$

$\therefore a+b+c = -3$

10. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-2}{x+2}$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① -5 ② -3 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-2}{x+2} \text{ 일 때,}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = 2 \text{ 에서 } (x-1) = 2(x+1)$$

$$x-1 = 2x+2$$

$$\therefore x = -3$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$f(2) = \frac{-3-2}{-3+2} = \frac{-5}{-1} = 5$$

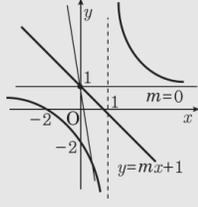
11. 분수함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < m \leq 12$ ② $-12 \leq m < 0$ ③ $-12 < m \leq 0$
 ④ $0 \leq m < 12$ ⑤ $-12 \leq m \leq 12$

해설

$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로 함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m = 0$ 일 때 두 그래프는 만나지 않는다.



(ii) $y = \frac{x+2}{x-1}$ 와 $y = mx + 1$ 에서

$$\frac{x+2}{x-1} = mx + 1$$

$$\text{즉, } mx^2 - mx - 3 = 0$$

이때, 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 + 12m < 0, m(m+12) < 0$$

$$\therefore -12 < m < 0$$

(i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는 $-12 < m \leq 0$