1. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{(가)})$ 이 참이다. (ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{(나)})$ 도 참이다.

이때, (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k ② 0, $k+1$ ③ 0, $k-1$
④ 1, k ⑤ 1, $k+1$

2. 다음은 자연수 n에 대한 명제 $\mathrm{P(n)}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 $\mathrm{P(n)}$으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

3. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ 이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
>
> (좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$
>
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
>
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$
>
> 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{(가)}$$
>
> $$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{(가)}$$
>
> $$=\boxed{(나)}$$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

4. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4} \\ &= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

답: ________

5. 다음은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$ ② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$ ④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

6. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

7. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 홀수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

8. 다음은 $h > 0$일 때, $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{\text{(가)}}$이므로 ㉠이 성립한다.
> ii) $n = k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
> $(1+h)^k = 1 + kh$
> $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{(가)}})(1+h) > 1+(k+1)h$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1 + 2h,\ 1 + kh$　　② $1 + 2h,\ 1 + (k+1)h$

③ $1 + h^2,\ 1 + kh$　　④ $1 + h^2,\ 1 + (k+1)h$

⑤ $2h + h^2,\ 1 + kh$

9. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. $\square$안에 알맞은 수를 구하여라.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$= \frac{1}{(2\times 1-1)(2\times 1+1)} = \frac{1}{3}$

(우변)$= \frac{1}{2\times 1+1} = \frac{1}{3}$ 이므로

등식은 성립한다.

(ii) $n=i$ $(i>1)$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{i}{2i+1}$

등호의 양변에 $\frac{1}{(2i+1)(2i+\square)}$을 더하면

(좌변)

$= \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

$= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(우변)

$= \frac{i}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$

$= \frac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{i+1}{2i+3} = \frac{i+1}{2(i+1)+1}$

따라서, $n=i+1$일 때 등식은 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n에 대하여 성립한다.

답: ________

10. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$ 일 때,

$(\text{좌변})=\frac{1}{(\text{가})}+\frac{1}{(\text{나})}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$ 을 더하면

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$$

$$>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$$

$$=\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+(\text{다})}-\frac{1}{2k+(\text{라})}\right)$$

$$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+(\text{다}))}>\frac{13}{24}$$

따라서, $n=k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq 2$ 인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라) 의 값은?

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19