

1. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\boxed{\overline{(가)}})$ 이 참이다.

(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{\overline{(나)}})$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① 0, k

② 0, $k + 1$

③ 0, $k - 1$
- ④ 1, k

⑤ 1, $k + 1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\boxed{1})$ 이 참이다.
- (ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{k+1})$ 도 참이다.

2. 다음은 자연수 n 에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
□이라 놓을 수 있다.
 $7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
 $= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
 $= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
 $= 3(7m' + 4^k)$
.....

- ① $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
- ② $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
- ③ $7^n - 4^n$ 은 n 으로 나누어떨어진다.
- ④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
- ⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 n 으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
 $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$ 일 때 증명한 것이다.
∴ ①

3. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, (우변) $= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{(가)}$
 $= \frac{k}{2k+1} + \boxed{(가)}$
 $= \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$ 를 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
 $= \frac{k}{2k+1} + \boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
 $= \boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

4. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$
양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\ominus)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\omin�)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\omin�)}{2} \right\}^2$$
따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\omin�$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$
양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$
따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.
 $\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$
 $\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$
 $\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$

5. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

㉠ $n = 1, k^2$

㉡ $n = 1, (k+1)^2$

㉢ $n = 5, (k-1)^2$

㉣ $n = 5, k^2$

㉤ $n = 5, (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore$ ㉠ $n = 5, \text{㉡} (k+1)^2$

6. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k + 2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 2)$ 가 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 2, \quad b = 2$
 $\therefore a + b = 4$

7. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 홀수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

홀수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(1)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 홀수이면 그 다음 홀수는 $k + 2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 2)$ 가 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 1, \quad b = 2$
 $\therefore a + b = 3$

8. 다음은 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{\text{(가)}}$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.
ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하면
 $(1+h)^k = 1 + kh$
 $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{(가)}})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $\textcircled{㉠}$ 은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ①

$1 + 2h, 1 + kh$

②

$1 + 2h, 1 + (k + 1)h$
- ③

$1 + h^2, 1 + kh$

④

$1 + h^2, 1 + (k + 1)h$
- ⑤

$2h + h^2, 1 + kh$

해설

(i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{1 + 2h}$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하면
 $(1+h)^k = 1 + kh$
 $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{1 + kh})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $\textcircled{㉠}$ 은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

9. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. □안에 알맞은 수를 구하여라.

(i) $n = 1$ 일 때
(좌변) $= \frac{1}{(2 \times 1 - 1)(2 \times 1 + 1)} = \frac{1}{3}$
(우변) $= \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$ 이므로
등식은 성립한다.
(ii) $n = i$ ($i > 1$) 일 때 등식이 성립한다고 가정하면
 $\sum_{k=1}^i \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{i}{2i+1}$
등호의 양변에 $\frac{1}{(2i+1)(2i+\square)}$ 을 더하면
(좌변)
 $= \sum_{k=1}^i \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
 $= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
(우변)
 $= \frac{i}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
 $= \frac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{i+1}{2i+3} = \frac{i+1}{2(i+1)+1}$
따라서, $n = i+1$ 일 때 등식은 성립한다.
그러므로 (i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n 에 대하여 성립한다.

▶ 답 :
▷ 정답 : 3

해설

(i) $n = 1$ 일 때
(좌변) $= \frac{1}{(2 \times 1 - 1)(2 \times 1 + 1)} = \frac{1}{3}$
(우변) $= \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$ 이므로
등식은 성립한다.
(ii) $n = i$ ($i > 1$) 일 때 등식이 성립한다고 가정하면
 $\sum_{k=1}^i \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{i}{2i+1}$
등호의 양변에 $\frac{1}{(2i+1)(2i+\boxed{3})}$ 을 더하면
(좌변)
 $= \sum_{k=1}^i \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
 $= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
(우변)
 $= \frac{i}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
 $= \frac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{i+1}{2i+3} = \frac{i+1}{2(i+1)+1}$
따라서, $n = i+1$ 일 때 등식은 성립한다.
그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n 에 대하여 성립한다.

10. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때,
(좌변) $= \frac{1}{(가)} + \frac{1}{(나)} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$
양변에 $\frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$ 을 더하면
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$
 $> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$
 $= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+(다)} - \frac{1}{2k+(라)} \right)$
 $= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+(다))} > \frac{13}{24}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

- ① 7
- ② 10
- ③ 13
- ④ 16
- ⑤ 19

해설

(i) $n = 2$ 일 때,
(좌변) $= \frac{1}{\boxed{3}} + \frac{1}{\boxed{4}} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$
양변에 $\frac{1}{2k+\boxed{1}} + \frac{1}{2k+\boxed{2}}$ 을 더하면
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+\boxed{1}} + \frac{1}{2k+\boxed{2}}$
 $> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+\boxed{1}} + \frac{1}{2k+\boxed{2}}$
 $= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+\boxed{1}} - \frac{1}{2k+\boxed{2}} \right)$
 $= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+\boxed{1})} > \frac{13}{24}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore (가)+(나)+(다)+(라) = 3 + 4 + 1 + 2 = 10$