1. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

2. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

3. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore \ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore \ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$
$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 550$

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식) $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$

$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

6. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$ 이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

7. $x \geq 0$일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$를 간단히 하면?

① $x\sqrt{x}$　② $x\sqrt[4]{x}$　③ $\sqrt[8]{x}$　④ $\sqrt[8]{x^3}$　⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$$
$$= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}$$
$$= \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}$$

8. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$ ㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$
$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$
$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ $\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$ $\therefore$ 거짓

9. $4^{x-1} = a$일 때, $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}$을 a에 대한 식으로 나타낸 것은?

① $\sqrt{a}$ ② $a\sqrt[5]{a}$ ③ $\sqrt[5]{a}$ ④ $\sqrt[5]{a^2}$ ⑤ $a^2\sqrt{a}$

해설

$4^{x-1} = 2^{2(x-1)} = a$이므로

$2^{x-1} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x} &= (2^{-5})^{1-x} = 2^{5(x-1)} \\ &= (2^{x-1})^5 = (a^{\frac{1}{2}})^5 = a^{\frac{5}{2}} = a^2\sqrt{a}\end{aligned}$$

10. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$

$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$

11. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$ 이 성립할 때, $|a-2| - |b-2| + \sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① 0　　② $2a-4$　　③ $4b$

④ -4　　⑤ $-2a+2b$

해설

$\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$ 가 성립한다면

$a-2 \geq 0,\ b+2 < 0 \Rightarrow a \geq 2,\ b < -2$

$|a-2| - |b-2| + \sqrt{(b-a)^2}$

$= a-2+(b-2)+|b-a| = a-2+b-2+a-b = 2a-4$

12. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

13. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x = \sqrt{5}+1$

$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore\ x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

14. $x,\ y$가 유리수이고, 등식 $x^2+\sqrt{3}y^2-2x+2\sqrt{3}y-3-3\sqrt{3}=0$이 성립할 때, 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

주어진 등식을 $\sqrt{3}$에 대하여 정리하면
$(x^2-2x-3)+(y^2+2y-3)\sqrt{3}=0$
여기서, $x^2-2x-3,\ y^2+2y-3$ 이 모두 유리수이고 $\sqrt{3}$ 이 무리수이므로
$x^2-2x-3=0$이고, $y^2+2y-3=0$
즉,$(x-3)(x+1)=0$이고 $(y+3)(y-1)=0$
$\therefore\ x=3$ 또는 $x=-1$ 이고 $y=-3$ 또는 $y=1$
따라서, 구하는 $x,\ y$의 쌍은
$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -3)$

15. 다음 보기에서 무리함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a=-1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

ㄴ $a>0$이면 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

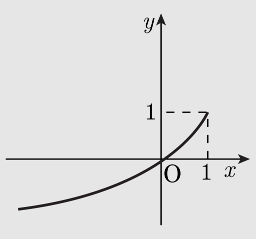
ㄷ $a<0$이면 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

ㄹ $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만날 수 있다.

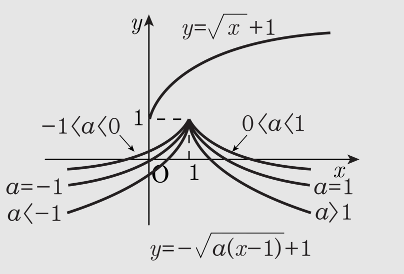
① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄹ

해설

ㄱ $a=-1$이면 주어진 무리함수는
$y=-\sqrt{-(x-1)}+1$
$y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



ㄴ, ㄷ $a>0$ 또는 $a<0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\le 1\}$
ㄹ $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y=\sqrt{x}+1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



16. 무리함수 $y=-\sqrt{1-x}+2$의 역함수는?

① $y=(x-2)^2+1(x\le 2)$
② $y=(x-2)^2-1(x\le 2)$
③ $y=-(x-2)^2+1(x\le 2)$
④ $y=-(x-2)^2-1(x\le 2)$
⑤ $y=-(x+2)^2+1(x\le 2)$

해설

$y=-\sqrt{1-x}+2$에서 $1-x\ge 0$이므로 $x\le 1$
$y-2=-\sqrt{1-x}\le 0$이므로 $y\le 2$
$1-x=(y-2)^2,\ x=-(y-2)^2+1$
x, y를 바꾸면 구하는 역함수는
$\therefore y=-(x-2)^2+1(x\le 2)$

17. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \cdots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, ㉠+ ㉡+ ㉢의 값을 구하여라.

$$[㉠] = \frac{3 + [㉡]}{2}$$
$$[㉡] = \frac{[㉢] + 15}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3+11}{2}$, $11 = \frac{7+15}{2}$ 가 성립하므로
㉠는 7, ㉡는 11, ㉢는 7이다.
$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ $= 7 + 11 + 7 = 25$

18. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$의 값은?

① $\dfrac{1}{11}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{9}{10}$ ④ $\dfrac{10}{11}$ ⑤ 1

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$ 의 양변의 역수를 취하면

$\dfrac{a_n + 1}{a_{n+1}} \quad \therefore\ b_{n+1} = b_n + 1$

따라서, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$, 공차가 1인 등비수열이므로

$b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore\ a_n = \dfrac{1}{n}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{10} \dfrac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{10} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= 2^{1-1}(1+3) = 4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
$= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

20. $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)$

$=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)$

$=\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{3}{2}}=3$

21. $A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$, $B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$ 일 때, AB의 값은?

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$

$=(\log_3 3^3)(\log_4 3^3+\log_{2^{-1}}3^{-1})$

$=(2\log_3 3^3)(\frac{2}{2}\log_2 3+\frac{-1}{-1}\log_2 3)$

$=2(\log_2 3+\log_2 3)=2\cdot\log_2 3=4\log_2 3$

$B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$

$=(\log_{3^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^2}5)(\log_5 2^6+\log_{5^2}2^3)$

$=(2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5)(6\log_5 2+\frac{3}{2}\log_5 2)$

$=\frac{5}{2}\log_3 5\cdot\frac{15}{2}\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}5}$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{75}{4}\log_3 2$

$\therefore\ AB=4\log_2 3\cdot\frac{75}{4}\log_3 2$

$=4\cdot\frac{75}{4}\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=75$

22. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.123} = \frac{1}{3}\log 0.123 = \frac{1}{3}\log 1.23 \times 10^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)$$
$$= -0.3034 = -1 + 0.6966$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분은 0.6966 이다.

23. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환 $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1-0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

24. $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때, $\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\sqrt{1 \pm 2x} = \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}$$

$$(\text{준식}) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

25. 등차수열을 이루는 세 수가 있다. 이 세 수의 합은 6이고, 세 수의 각각의 제곱의 합은 14이다. 이 세 수로 알맞은 것은?

① $-4,\ 3,\ 10$　② $-2,\ 1,\ 3$　③ $-1,\ 3,\ 7$
④ $0,\ 2,\ 4$　⑤ $1,\ 2,\ 3$

해설

구하는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면 이 세 수의 합이 6이므로
$(a-d)+a+(a+d)=6 \cdots$ ㉠
세 수의 각각의 제곱의 합이 14이므로
$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=14 \cdots$ ㉡
㉠에서 $3a=6 \quad \therefore\ a=2$
㉡에서 $3a^2+2d^2=14$
$a=2$이므로 $d^2=1$
$d=1$일 때, $a-d=1,\ a=2,\ a+d=3$
$d=-1$일 때, $a-d=3,\ a=2,\ a+d=1$
따라서 세 수는 1, 2, 3이다.

26. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p + q$의 값은?

① -43 ② -33 ③ -23 ④ -13 ⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고
$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면
$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
$b_1 = q + 5$이고
$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면
$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
$\{a_n\}$의 공차는 4,
$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$
$a_5 = p + 18$, $b_5 = 5 + 9q$
$p + 18 = 5 + 9q$, $\quad \therefore\ p = -31$
$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$

27. 등식 $(1+2+2^2+\cdots+2^{10})\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)=(2^6-m)^2$ 을 만족하는 실수 m의 값은?

① $\frac{1}{2^4}$ ② $\frac{1}{2^5}$ ③ $\frac{1}{2^6}$ ④ $\frac{3}{2^5}$ ⑤ $\frac{3}{2^6}$

해설

$$1+2+2^2+\cdots+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\therefore\ (2^{11}-1)\left(2-\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$=(2^{11}-1)\cdot\frac{2^{11}-1}{2^{10}}=\frac{(2^{11}-1)^2}{2^{10}}$$

$$=\left(\frac{2^{11}-1}{2^5}\right)^2=\left(2^6-\frac{1}{2^5}\right)$$

$$\therefore\ m=\frac{1}{2^5}$$

28. 어느 나라에서 복권에 1등으로 당첨된 사람에게 지급해야 할 상금을 1년 간격으로 20회로 나누어 매회 일정한 금액을 지급한다고 한다. 1등으로 당첨된 사람의 상금이 20억원이고 매년 5%의 복리로 이자를 계산한다고 할 때, 매회 약 얼마를 지급해야 하는가? (단, 첫회는 당첨된 직후에 지급하고, $1.05^{19} = 2.53,\ 1.05^{20} = 2.65$로 계산한다.)

① 1억 1천 5백만 원　② 1억 2천 5백만 원
③ 1억 3천 2백만 원　④ 1억 5천 3백만 원
⑤ 1억 6천 5백만 원

해설

매회 받는 상금의 액수를 a억 원이라 하면

$$20 \times 1.05^{19} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$\therefore\ a = \frac{20 \times 2.53 \times 0.05}{2.65 - 1} = 1.5333\cdots\ (\text{억 원})$$

따라서 매회 약 1억 5천 3백만원을 지급해야 한다.

29. 자연수로 이루어진 순서쌍의 수열 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (1,\ 4),$ $(2,\ 3),\ (3,\ 2)\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\cdots$ 에서 두 수가 모두 한 자리의 자연수로 이루어진 순서쌍의 총 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

주어진 수열을 순서쌍의 두 수의 합이 같은 것 끼리 군을 묶으면
$(1,\ 1) |\ (1,\ 2),\ (2,\ 1) |\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1) |, \cdots$
이 때, 각 군에서 모든 항의 순서쌍의 두 수가 한 자리의 자연수인 군의 수를 구하기 위해 두수의 합이 10이 되는 것부터 세면

$$1+2+3+\cdots+10=\frac{9\cdot 10}{2}=45\cdots ㉠$$

두 수의 합이 11인 순서쌍의 개수는 10이고, 이중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은$(1,\ 10),\ (10,\ 1)$을 제외한 8개다.
같은 방법으로 두 수의 합이 12인 순서쌍의 개수는 11이고, 이중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은 $11-4=7$(개)이다.
두 수의 합이 18로 이루어진 순서쌍 중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍의 개수는 $17-16=1$(즉, $(9,\ 9)$)이므로 모두

$$(10-2)+(11-4)+(12-6)+(13-8)+(14-10)$$
$$+(15-12)+(16-14)+(17-16)$$
$$=8+7+6+\cdots+1=\frac{8\cdot 9}{2}=36\cdots ㉡$$

따라서, ㉠, ㉡에서 두 수가 모두 한자리의 자연수로 이루어진 순서쌍의 총 개수는 81이다.

30. 자연수 A에 대하여 A^{50}이 67자리의 수일 때, A^{20}은 몇 자리의 수인가?

① 26자리　② 27자리　③ 28자리
④ 29자리　⑤ 30자리

해설

67자리의 수이므로 $\log A^{50} = 66 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$50 \log A = 66 + \alpha$

$\log A^{20} = 20 \log A = \dfrac{20}{50}(66 + \alpha) = \dfrac{4}{10}(66 + \alpha)$

$= 26.4 + \dfrac{4}{10}\alpha$

$0 \le \alpha < 1$이므로 $0 \le \dfrac{4}{10}\alpha < \dfrac{4}{10}$

$0.4 \le 0.4 + \dfrac{4}{10}\alpha < 0.8$이므로

$0.4 + \dfrac{4}{10}\alpha$가 가수, 지표는 26

$\therefore$ 27자리의 수

31. 0 이상 1 이하의 모든 분수를 다음과 같이 단계별로 나타내었다.

1단계	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$
2단계	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$
3단계	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$
4단계	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$
$\cdots$				$\cdots$					
8단계				$\cdots$					

이때, 각 단계의 왼쪽에서 $(2n-1)$번째 수와 $(2n+1)$번째 수가 각각 $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{c}$이면 $2n$번째 수는 $\frac{b+d}{a+c}$이다. 이와 같은 방법으로 8단계까지 완성했을 때, 8단계에 나타나는 분수에 대한 보기의 설명 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 분모와 분자의 차가 1인 분수의 개수는 8개이다.

㉡ 분모의 최댓값은 21이다.

㉢ 모든 분수의 합은 $\frac{129}{2}$이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 각 단계별로 분모와 분자의 차가 1인 분수는 다음과 같다.

1단계 : $\frac{0}{1}$ $\Rightarrow$ 1개

2단계 : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 2개

3단계 : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ 3개

$\vdots$

8단계 : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\cdots$, $\frac{7}{8}$ $\Rightarrow$ 8개

㉡ 각 단계별로 가장 큰 분모가 생기는 이웃한 두 분수의 분모는 다음과 같다.

1단계 : 1, 1 2단계 : 2, 1 3단계 : 2, 3

4단계 : 5, 3 5단계 : 5, 8 6단계 : 13, 8

7단계 : 13, 21 8단계 : 34, 21

따라서 8단계에서의 분모의 최댓값은 34이다.

㉢ 각 단계별로 모든 분수의 개수는 다음과 같다.

1단계 : 2

2단계 : $2+1=3$

3단계 : $3+2=5$

4단계 : $5+4=9$

5단계 : $9+8=17$

6단계 : $17+16=33$

7단계 : $33+32=65$

8단계 : $65+64=129$

이 때, 8단계의 129개의 수를 왼쪽부터 차례로 a_1, a_2, $a_3, \cdots, a_{129}$라 하면

$a_{65}=\frac{1}{2}$이므로 8단계의 모든 분수의 합은 $64+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$

에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

32. 수열 $\{a_n\}$이 $\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_1}=\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+a_2}}=\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+a_3}}}=$ $\cdots$ 일 때, a_{2014}의 값은?

① $\sqrt{17}-4$　　② $3-\sqrt{17}$　　③ $5-\sqrt{17}$
④ $\sqrt{17}$　　⑤ $\sqrt{17+4}$

해설

$\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_1}$

$8+a_1=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}=\sqrt{17}+4$

$a_1=\sqrt{17}-4$

그런데 $a_1=\dfrac{1}{8+a_2}$ 이므로

$a_n=\dfrac{1}{8+a_{n+1}}$

$a_{n+1}+8=\dfrac{1}{a_n}$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}-8$

$a_2=\dfrac{1}{a_1}-8=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}-8$

$=\sqrt{17}+4-8=\sqrt{17}-4$

$a_3=\dfrac{1}{a_2}-8=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}-8$

$=\sqrt{17}-4$

즉 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$

$=\sqrt{17}-4$

$\therefore a_{2014}=\sqrt{17}-4$

33. $\log A$의 정수 부분과 소수 부분이 x에 대한 이차방정식 $px^2-(4p-1)x+p+1=0$의 두 근일 때 1보다 큰 자연수 p의 값을 구하면?

① 2　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 7

해설

$\log A = n+\alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)이라 하면

$n+\alpha = \dfrac{4p-1}{p} = 4-\dfrac{1}{p} = 3+1-\dfrac{1}{p}$,

$n\alpha = \dfrac{p+1}{p}$

p는 1보다 큰 자연수이므로

$p > 1$

$0 < \dfrac{1}{p} < 1$

$0 > -\dfrac{1}{p} > -1$

$0 < 1-\dfrac{1}{p} < 1$

$\therefore 3 = n,\ 1-\dfrac{1}{p} = \alpha$

$3\cdot(1-\dfrac{1}{p}) = \dfrac{p+1}{p}$

$3-\dfrac{3}{p} = 1+\dfrac{1}{p}$

$2 = \dfrac{4}{p}$

$\therefore\ p = 2$