1. 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a_n = 3^n$

해설

$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

2. $\sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 - \sqrt[3]{\sqrt{64}}$를 간단히 하면?

① 2　　② 0　　③ −1　　④ −2　　⑤ −4

해설

$\sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 - \sqrt[3]{\sqrt{64}}$

$= 2^{\frac{10}{5}} \div 2^{\frac{6}{3}} - 2^{\frac{6}{6}}$

$= 1 - 1 = 0$

3. $\left\{(\frac{1}{4})^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{8}{3}}$ 을 간단히 하면?

① -16 ② -4 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}\times(-\frac{8}{3})} = \left(\frac{1}{4}\right)^{(-2)} = 2^{-2\times(-2)} = 2^4 = 16$$

4. $\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{2}$

해설

$\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$에서

$\log_x 4 = (\sqrt{2})^4 = 4$

$\therefore\ x^4 = 4,\ x^2 = 2$

이 때, 밑의 조건에서 $x \neq 1, x > 1$이므로 $x = \sqrt{2}$

5. $\log_3(x-5)^2$ 의 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $x > 4$ ② $x < 5$ ③ $x > 5$ ④ $x \neq 4$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$(x-5)^2 > 0$ 로부터 $x \neq 5$

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5+a_6=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $a_6+a_7=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1$(복호동순), $a_5+a_7=2a_6$이므로
$(a_5+a_6)+(a_6+a_7)=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)$에서

$4a_6=2\sqrt{3}\quad\therefore\ a_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10}을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

해설

$a = 3,\ d = 4,\ n = 10$이므로

$S_n = \dfrac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$에 대입하면

$S_{10} = \dfrac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$

8. 다음 보기의 수열 중 등비수열인 것은?

보기

㉠ $\{2n+1\}$　　㉡ $\{n^2\}$

㉢ $\{3^{n+1}\}$　　㉣ $\{5\cdot 3^{n-2}\}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

등비수열은 ar^{n-1} 의 꼴로
나타낼 수 있는 수열이므로

㉢ $3^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{n-1}$
첫째항 $= 3^2$, 공비 $= 3$

㉣ $5\cdot 3^{n-2} = \frac{5}{3}\cdot 3^{n-1}$
첫째항 $= \frac{5}{3}$, 공비 $= 3$

9. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$일 때, a_4의 값은?

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$

$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3r^9$

$a^3r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$

$\therefore ar^3 = 4$

$\therefore a_4 = 4$

10. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

11. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$ 의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$

12. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$$(\text{준 식})=\sum_{k=1}^{3}(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$$

13. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$ ② $\frac{100}{101}$ ③ $\frac{200}{201}$ ④ $\frac{110}{101}$ ⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$

14. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3,\ \frac{1}{a_2} = 6$이므로

$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \frac{1}{3n}$

$a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore\ a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$

15. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 2n$일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -280

해설

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$
$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10})$
$= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10)$
$= -360 - (-80) = -280$

16. 8과 27사이에 두 수 x, y를 넣었더니 8, x, y, 27이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

8, x, y, 27이 등비수열이므로

$a_1 = 8$

$a_4 = a_1 r^3 = 27,\ 8r^3 = 27$

$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$

$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$

$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$

$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$

17. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 5)$

$= 2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

18. $10^{0.31} = 2$, $10^{1.04} = 11$로 계산할 때, $10^{a} = 275$를 만족하는 a의 값은?

① 2.34 ② 2.38 ③ 2.42 ④ 2.46 ⑤ 2.50

해설

$5 = \dfrac{10}{2} = \dfrac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69}$이므로

$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$

$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$

$\therefore\ a = 2.42$

19. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\log_{10} 2\cdot(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$=\log_{10}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}$
$=\log_{10} 100=2$

20. $a_n = \log \dfrac{n}{n+1}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{99} a_k$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a_n = \log \dfrac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1)$ 이므로

$\sum_{k=1}^{99} a_k = \sum_{k=1}^{99} \{\log k - \log(k+1)\}$

$= (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + \cdots + (\log 99 - \log 100)$

$= \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1,\ a_2 = 3$이고,
$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2} (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

① 196 ② 198 ③ 200 ④ 202 ⑤ 204

해설

$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}$에서
$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$
$\therefore\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{1} = 3$
이므로
$\therefore\ a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k = 3^4 + \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$
$= 81 + 121 = 202$

22. 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,\ n)$이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, n은 2이상의 자연수 이다.)
$f(5,\ -5)+f(0,\ 5)+f(0,\ 6)+f(5,\ 6)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

(i) $a<0$일 때,
n이 짝수이면 $f(a,\ n)=0$, n이 홀수이면 $f(a,\ n)=1$이므로
$f(5,\ -5)=1$
(ii) $a=0$일 때,
$f(a,\ n)=1$이므로 $f(0,\ 5)=f(0,\ 6)=1$
(iii) $a>0$일 때,
n이 짝수이면 $f(a,\ n)=2$이므로 $f(5,\ 6)=2$
$f(5,\ -5)+f(0,\ 5)+f(0,\ 6)+f(5,\ 6)=1+1+1+2=5$

23. 이차방정식 $4x^2+3x+5=0$의 두 근이 α, β이고, $\log_{10}2=t$라고 할 때, $\log_{10}\dfrac{5}{\alpha^4}+\log_{10}\dfrac{5}{\beta^4}$를 t에 관한 식으로 나타내면?

① $5t-2$ ② $5t-1$ ③ $5t$

④ $10t-2$ ⑤ $10t+2$

해설

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{4}$, $\alpha\beta=\dfrac{5}{4}$

$$\log_{10}\frac{5}{\alpha^4}+\log_{10}\frac{5}{\beta^4}$$

$$=\log_{10}\frac{5\cdot5}{\alpha^4\beta^4}=\log_{10}\frac{5^2}{(\alpha\beta)^4}$$

$$=\log_{10}\frac{5^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^4}=\log_{10}\frac{2^8}{5^2}$$

$$=\log_{10}\frac{2^{10}}{5^2\times2^2}=\log_{10}2^{10}-\log_{10}10^2$$

$$=10\log_{10}2-2=10t-2$$

24. $\log x$의 정수 부분이 2이고, $\log x^2$의 소수 부분과 $\log x^4$의 소수 부분이 같도록 하는 x의 최솟값과 최댓값을 각각 α, $\beta(\alpha < \beta)$라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 10
④ $10\sqrt{10}$ ⑤ 100

해설

$\log x$의 정수 부분이 2이므로
$2 \le \log x < 3 \cdots$㉠
$\log x^2$의 소수 부분과 $\log x^4$의 소수 부분이 같으므로
$\log x^4 - \log x^2 = 2\log x$ (정수)
㉠에서 $4 \le 2\log x < 6$ 이므로
$2\log x = 4$ 또는 $2\log x = 5$
$\therefore \log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{5}{2}$
$\therefore x = 100$ 또는 $\log x = 100\sqrt{10}$
$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \frac{100\sqrt{10}}{100} = \sqrt{10}$

25. 5년에 한 번씩 시행하는 인구주택총조사 결과 A시의 인구는 5년마다 7% 증가한다고 한다. 2015년의 A시의 인구가 100만 명이었을 때, 2050년의 이 시의 인구는? (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 1.62 = 0.21$로 계산한다.)

① 121만명 ② 145만명 ③ 162만명
④ 178만명 ⑤ 185만명

해설

2050년은 2015년으로부터 35년 후이고 35년은 5년이 7번 지난 것이므로 2050년의 A의 인구는
$100 \times (1 + 0.07)^7 = 100 \times 1.07^7$(만 명)
$\log 1.07^7 = 7 \log 1.07 = 7 \times 0.03 = 0.21$
이때 $\log 1.62 = 0.21$이므로
$1.07^7 = 1.62$
따라서 2050년의 A시의 인구는 $100 \times 1.62 = 162$(만 명)