

1. 세 점 $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 2)$ 를 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 할 때 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \cdots \textcircled{A} \text{이라 하면}$$

$\textcircled{A}$ 는 점 $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 2)$ 를 지나므로

$$1 + 1 + A + B + C = 0, \quad 4 + 1 + 2A - B + C = 0,$$

$$9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$$

$$\therefore A = -5, \quad B = -1, \quad C = 4$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

$$\therefore A \times B \times C = 20$$

2. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{6}$

③ $\sqrt{7}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,
구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

i) $\textcircled{㉠}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$a^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

ii) $\textcircled{㉠}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{㉡} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

3. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은

$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$

y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

4. 두 원 O_1 , O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1 , r_2 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.

② 내접한다.

③ 두 점에서 만난다.

④ 만나지 않는다.

⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

5. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x - 2y = 20 \quad \therefore y = 2x - 10$$

$$\text{따라서, } a = 2, b = -10 \quad \therefore a + b = 2 - 10 = -8$$

6. 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x = -1$

② $x = -2$

③ $x = -3$

④ $x = -4$

⑤ $x = -5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5 \cdot x + 0 \cdot y = 25$

$$-5x = 25$$

$$\therefore x = -5$$

7. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$

② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$

③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$

③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

8. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)

① $0 < a < 3$

② $3 < a < 7$

③ $a > 7$

④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 > a + 2$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$$d = 5 < |a - 2|$$

$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

9. 반지름의 길이가 5cm, 8cm 인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

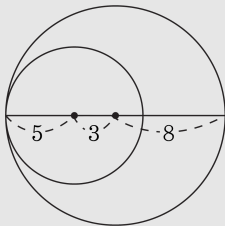
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5인 원이 반지름이 8인 원 안에 내접한다.



10. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm

② 10 cm

③ 11 cm

④ 12 cm

⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
13 cm이다.

공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$

11. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 4

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

12. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

13. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

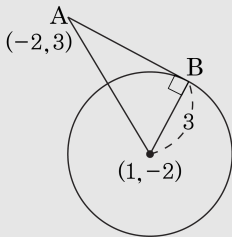
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



14. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 $(5, 0)$ 이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

15. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$

③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$

⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

16. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 이 있다.
이 원 밖의 임의의 한 점에서 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 직교하는 점들의 자취방정식의 자취의 길이는?

① π

② 5π

③ $\sqrt{10}\pi$

④ $2\sqrt{10}\pi$

⑤ 10π

해설

주어진 원은 중심이 $(-1, -2)$ 이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

원 밖의 한 점 $P(a, b)$ 에서 원에 그은 접선이 서로 수직이려면
원의 중심에서 P 까지의
거리가 $\sqrt{10}$ 이어야 한다.

따라서 두 접선이 직교하는 점들의 자취의 방정식은 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$

17. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

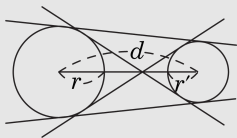
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



18. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을

표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로

중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.

원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에

이르는 거리의 최솟값은

$$d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

19. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

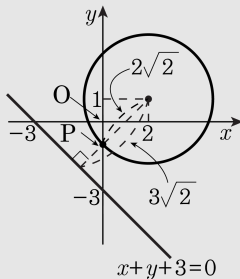
$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

따라서 점 P는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원위를 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x + y + 3 = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2 + 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

아래 그림에서 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은 $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



20. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

21. 좌표평면 위의 두 점 $(2, 2)$, $(9, 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

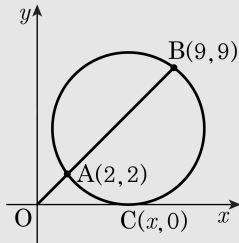
해설

다음 그림에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$$

$$\therefore x = 6$$



22. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

23. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c = ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$$\left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$(i) \left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| \text{ 에서 } |a| = |b|$$

$$\therefore a^2 = b^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(ii) \left|-\frac{a}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 의 양변을 제곱하면 } \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

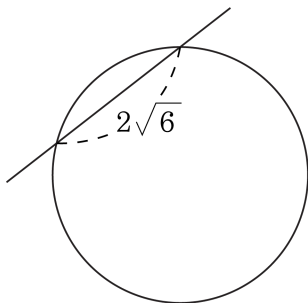
$$\therefore b^2 = 4c \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면 $a^2 = 4c$

$$\therefore c = \frac{1}{4}a^2$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

24. 원 $x^2 + y^2 = 16$ 이 직선 $l: ax - y - 5(a - 1) = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 정수 a 의 값은?



① -2

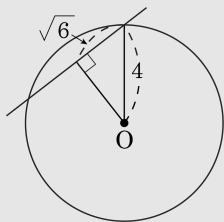
② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설



원의 중심에서 직선까지 거리

$$\sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

$ax - y - 5(a - 1) = 0$ 에서

$$\frac{|-5(a - 1)|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$25(a - 1)^2 = 10(a^2 + 1), 15a^2 - 50a + 15 = 0$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$(3a - 1)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3$$

25. 점 $(-3, 1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 양인 직선의 방정식을 구하면?

① $2x + y - 5 = 0$

② $2x - y - 5 = 0$

③ $x - 2y + 5 = 0$

④ $x - 2y - 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 $(-3, 1)$ 을 지나므로

$$y = m(x + 3) + 1, \quad mx - y + 3m + 1 = 0$$

접선이므로 원의 중심과 직선사이의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, -2$$

$$m > 0 \text{ 이므로 } m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{직선의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$