

1. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = -6n + 7$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -1, d = 5$ ② $a = -1, d = 6$ ③ $a = 1, d = -5$

④ $a = 1, d = -6$ ⑤ $a = 2, d = 7$

해설

$$a_n = -6n + 7 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = -6 \cdot 1 + 7 = 1,$$

$$a_2 = -6 \cdot 2 + 7 = -5 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = -6$$

2. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

- ① 61 ② 122 ③ 244 ④ 361 ⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ 에서}$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

3. $\sum_{k=1}^{100} a_k = 10$, $\sum_{k=1}^{100} a_k^2 = 20$, 일 때, $\sum_{k=1}^{100} (a_k + 1)^2 + \sum_{k=1}^{100} (a_k - 2)^2$ 의 값은?

① 520 ② 540 ③ 560 ④ 580 ⑤ 600

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{100} (a_k + 1)^2 + \sum_{k=1}^{100} (a_k - 2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{100} (2a_k^2 - 2a_k + 5) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{100} a_k^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{100} a_k + \sum_{k=1}^{100} 5 \\ &= 2 \cdot 20 - 2 \cdot 10 + 500 \\ &= 40 - 20 + 500 = 520 \end{aligned}$$

4. 다음 식의 값은?

$$2^8 \times 3^5 \times 6^{-6}$$

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$$\begin{aligned} 2^8 \times 3^5 \times 6^{-6} &= 2^8 \times 3^5 \times (2 \times 3)^{-6} \\ &= 2^8 \times 3^5 \times 2^{-6} \times 3^{-6} \\ &= 2^{8+(-6)} \times 3^{5+(-6)} \\ &= 2^2 \times 3^{-1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

5. $\log_3(x-6)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

- ① $x > 3$ ② $x < 3$ ③ $x < 6$ ④ $x > 6$ ⑤ $x \geq 6$

해설

$x-6 > 0$ 로부터 $x > 6$

6. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ 0 ④ $\log_3 2$ ⑤ $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75 \\ &= \log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 75 \\ &= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}} \\ &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$ 의 값은?

① $-\frac{1}{12}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{12}$

④ 1

⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$$\begin{aligned} & \log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

8. 양수 A 에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?
- ① 정수 부분 : -1 , 소수 부분 : 0.659
 - ② 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.341
 - ③ 정수 부분 : -2 , 소수 부분 : 0.659
 - ④ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.341
 - ⑤ 정수 부분 : -3 , 소수 부분 : 0.659

해설

$$\begin{aligned} -2.341 &= -2 - 0.341 = (-2 - 1) + (1 - 0.341) \\ &= -3 + 0.659 \end{aligned}$$

따라서 정수 부분은 -3 , 소수 부분은 0.659 이다.

9. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

10. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $n \geq 3$ 일 때, $S_n = 94$ 를 만족하는 d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$S_n = 94 \text{에서 } \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2} = 94$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 n 의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$$n = 4 \text{일때, } 2 + (4-1)d = 47 \quad \therefore d = 15$$

$$n = 47 \text{일때, } 2 + (47-1)d = 4 \quad \therefore d = \frac{2}{23}$$

$$n = 94 \text{일때, } 2 + (94-1)d = 2 \quad \therefore d = 0$$

$$n = 188 \text{일때, } 2 + (188-1)d = 1 \quad \therefore d = -\frac{1}{187}$$

이 중에서 d 가 자연수가 되는 것은 $n = 4$ 이므로 $d = 15$

11. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

12. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned}a_{10} &= S_{10} - S_9 \\S_{10} &= 10^2 + 20 - 1 = 119, \\S_9 &= 9^2 + 18 - 1 = 98 \\ \therefore a_{10} &= 119 - 98 = 21\end{aligned}$$

13. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{A} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

14. 등비증항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, 안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$-2, \square, -8, \square, \square, 64, \dots$

- ① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b 라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$
따라서 $b = 4$ 이고 공비는 -2 인 수열이 되므로 구하는 수열은
 $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$
 $\therefore 4 + 16 - 32 = -12$

15. 세 수 $x-4$, x , $x+8$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x 가 $x-4$, x , $x+8$ 의 등비중항이므로
 $x^2 = (x-4)(x+8)$, $x^2 = x^2 + 4x - 32$
 $4x = 32 \therefore x = 8$

16. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

17. 다음 수열에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.

1, 2, 4, 7, 11, a , b , ...

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$

 1 2 3 4 5 6

$\therefore a = 16, b = 22$

$a + b = 16 + 22 = 38$

18. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

19. $a = \frac{4}{\sqrt{2}}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$ 를 a, b 로 나타낸 것은?

- ① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2}\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

20. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$$

21. $\log_8 3 = p$, $\log_3 5 = q$ 일 때, $\log_{10} 5$ 를 p, q 로 나타내면?

① pq

② $\frac{p-q}{3}$

③ $\frac{2pq}{p+q}$

④ $\frac{3pq}{1+3pq}$

⑤ $\sqrt{p^2+q^2}$

해설

$$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3} \log_2 3 = p$$

$$\therefore \log_2 3 = 3p$$

$$\log_{10} 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 10} = \frac{\log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 2} = \frac{q}{q + \frac{1}{3p}}$$

$$= \frac{3pq}{3pq+1}$$

22. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$

② $\log_a \frac{1}{y^5}$

③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$

⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 3(2 \log_a x - 3 \log_a y) + 2(2 \log_a y - 3 \log_a x) \\ &= -5 \log_a y = \log_a \frac{1}{y^5} \end{aligned}$$

23. 첫째항부터 제3항까지의 합이 7, 제4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

- ① 498 ② 502 ③ 511 ④ 512 ⑤ 524

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7 \dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 63 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 7(r^3 + 1) = 63$$

$$r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a(2^3 - 1) = 7 \quad \therefore a = 1$$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 512 - 1 = 511$$

24. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 = 291$$

25. 다음 수열의 합을 구하여라.

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{1}$$
$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{2}$$
이므로 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면
$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$
$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

26. 수열 $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$ 에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면
1/ 1, 2/1, 2, 3/ 1, 2, 3, 4/ ...
1군은 1
2군은 1, 2
3군은 1, 2, 3이므로
7군은 1, 2, 3, ..., 7
(6까지의 항의 총수)= $1 + 2 + \dots + 6 = 21$
 $21 + 7 = 28$ (번째 항)

27. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 이 성립하고 $a_1 = 1$ 일 때, $a_{10} + 1$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ 에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$ 이므로 $\alpha = -1$

$\therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$ 이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

28. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

가. $a_1 = 2$

나. a_{n+1} 은 $3a_n$ 을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a_1 = 2$, $3a_1 = 6$ 을 5로 나눈 나머지는 1이므로

$a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$

$a_6 = 1, \dots, a_{13} = a_1 = 2$, $a_{40} = a_4 = 4$ 이므로

$\therefore a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

29. $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

⋮

$$\therefore a_1 = a_6 = a_{11} = \dots = 3$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = \dots = 2$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = \dots = 1$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = \dots = 1$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = \dots = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$$

$$= 13 \times 9 + 3 = 120$$

30. 다음 명제 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ① -1 의 세제곱근 중 허수는 한 개뿐이다.
- ② $-\sqrt{3}$ 의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{3}$ 이다.
- ③ $\sqrt{2}$ 의 네제곱근 중 실수는 $-\sqrt[4]{2}$ 와 $\sqrt[4]{2}$ 뿐이다.
- ④ -10 의 n 제곱근(n 은 홀수) 중 실수인 것은 한 개뿐이다.
- ⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = -\sqrt[3]{3}$

해설

- ① -1 의 세제곱근 중 실수 1개와 허수2개가 있다. (거짓)
- ② $-\sqrt{3}$ 의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ 이다. (거짓)
- ③ n 이 홀수일 때, -10 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-10}$, 즉 한개이다. (참)
- ⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = \{(\sqrt[3]{-3})^3\}^3 = (-3)^3 = -27$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

31. 세 수 $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$, $B = \sqrt{2\sqrt[3]{5}}$, $C = \sqrt[12]{1024}$ 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $B < C < A$
- ⑤ $C < B < A$

해설

거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt[n]{N}$ 꼴로 통일한다.

$A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{50}} = \sqrt[6]{50}$

$B = \sqrt{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{40}} = \sqrt[6]{40}$

$C = \sqrt[12]{1024} = \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$ 이므로

$\sqrt[6]{32} < \sqrt[6]{40} < \sqrt[6]{50}$ 이므로

$\therefore C < B < A$

32. $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$x^3 + x^{-3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$\begin{aligned}(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 &= 2^2 \\ x - 2 + x^{-1} &= 4 \\ x + x^{-1} &= 6 \\ (x + x^{-1})^3 &= x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216 \\ x^3 + x^{-3} &= 216 - 18 = 198\end{aligned}$$

33. 12나 18로 나누어떨어지지 않는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 439200

해설

구하는 총합을 S 라 하고, 세 자리의 자연수 중에서 12로 나누어 떨어지는 수의 총합을 S_{12} , 18로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{18} , 36으로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{36} 이라고 하면 $S = (\text{세 자리의 자연수의 총합})$

$- (S_{12} + S_{18} - S_{36})$ 이다.

이때, 세 자리의 자연수의 총합은

$$100 + 101 + \cdots + 999 = \frac{900(100 + 999)}{2} = 494550 \text{ 이고}$$

$$S_{12} = 12 \cdot 9 + 12 \cdot 10 + \cdots + 12 \cdot 83$$

$$= \frac{75(108 + 996)}{2} = 41400$$

$$S_{18} = 18 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + \cdots + 18 \cdot 55$$

$$= \frac{50(108 + 990)}{2} = 27450$$

$$S_{36} = 36 \cdot 3 + 36 \cdot 4 + \cdots + 36 \cdot 27$$

$$= \frac{25(108 + 972)}{2} = 13500$$

이므로 구하는 총합 S 는

$$494550 - (41400 + 27450 - 13500) = 439200$$

34. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 후에는 6만 명, 20년 후에는 9만 명이 될 것으로 예상된다. 이때, A 도시의 30년 후의 인구는?
- ① 12.5만 명 ② 13만 명 ③ 13.5만 명
④ 14만 명 ⑤ 14.5만 명

해설

A 도시의 올해 인구를 a , 인구 증가율을 r 라 하면 n 년 후의 인구는 $a(1+r)^n$ 명이다.
10년 후의 인구가 6만 명이므로
 $a(1+r)^{10} = 6 \times 10^4 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
20년 후의 인구가 9만 명이므로
 $a(1+r)^{20} = 9 \times 10^4 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}$ 을 $\textcircled{\text{㉡}}$ 에 대입하면 $(1+r)^{10} = \frac{3}{2}$
30년 후의 인구는
 $a(1+r)^{30} = a(1+r)^{10} \{(1+r)^{10}\}^2$
 $60000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{270000}{2} = 135000(\text{명})$
따라서 13.5만 명이 된다.

35. 어느 나라에서 복권에 1등으로 당첨된 사람에게 지급해야 할 상금을 1년 간격으로 20회로 나누어 매회 일정한 금액을 지급한다고 한다. 1등으로 당첨된 사람의 상금이 20억원이고 매년 5%의 복리로 이자를 계산한다고 할 때, 매회 약 얼마를 지급해야 하는가? (단, 첫회는 당첨된 직후에 지급하고, $1.05^{19} = 2.53$, $1.05^{20} = 2.65$ 로 계산한다.)
- ① 1억 1천 5백만 원 ② 1억 2천 5백만 원
③ 1억 3천 2백만 원 ④ 1억 5천 3백만 원
⑤ 1억 6천 5백만 원

해설

매회 받는 상금의 액수를 a 억 원이라 하면

$$20 \times 1.05^{19} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$
$$\therefore a = \frac{20 \times 2.53 \times 0.05}{2.65 - 1} = 1.5333 \dots (\text{억 원})$$

따라서 매회 약 1억 5천 3백만원을 지급해야 한다.

36. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a_2 = -1$
㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$
㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 에서 $n = 1$ 을 대입하면
 $2\sum_{k=1}^1 a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$
즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$
 $\therefore a_2 = \frac{4a_1 + 1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ (참)
㉡ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots \text{㉠}$
 $2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots \text{㉡}$
㉡-㉠에서
 $2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $\therefore 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$ (거짓)
㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$
 $= 2(3a_{n+1} - a_n)$
따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다. (참)
따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

37. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염 물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다. 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염 물질이 있다. 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10% 씩 줄어들지만 매년 15톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 보고서에 의하면 지금으로부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염 물질의 양은? (단, $0.9^9 = 0.4$ 로 계산한다.)

- ① 150톤
- ② 165톤
- ③ 177톤
- ④ 186톤
- ⑤ 197톤

해설

n 년 후 남아있는 오염물질의 양을 $\{a_n\}$ 이라하면

$$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$$

a_1 은 1년 후 오염물질의 양이므로

$$a_1 = 250 \times 0.9 + 15 = 240$$

$$(a_{n+1} - \alpha) = 0.9(a_n - \alpha)$$

$$a_{n+1} = 0.9a_n + 0.1\alpha$$

$$0.1\alpha = 15 \quad \alpha = 150$$

$$\therefore a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$$

$$a_n - 150 = (a_1 - 150) \times 0.9^{n-1}$$

$$a_n = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$$

$$a_{10} = 90 \times 0.9^{9-1} + 150$$

$$90 \times 0.4 + 150 = 186$$

38. $\log_{10} 3000$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라고 할 때, $x + 3^{\frac{1}{y}}$ 의 값은?

① 0

② 2

③ 5

④ 8

⑤ 13

해설

$$\log_{10} 3000 = \log_{10} (3 \times 1000)$$

$$= \log_{10} 3 + \log_{10} 1000$$

$$= \log_{10} 3 + 3$$

정수 부분은 3, 소수 부분은 $\log_{10} 3$ 이므로

$$x + 3^{\frac{1}{y}} = 3 + 3^{\frac{1}{\log_{10} 3}} = 3 + 3^{\log_3 10} = 3 + 10 = 13$$

39. 함수 $f(x) = x - [x]$ 라 하자.(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수 이다.) 양수 a, b 에 대하여 $f(\log a) = 0, f\left(\log \frac{1}{b}\right) = 0.6$ 일 때, $f\left(\log \frac{1}{a}\right) + f(\log b)$ 의 값은?

① 0.6 ② -0.4 ③ 0.4 ④ 0.6 ⑤ 1.6

해설

$[x]$ 는 $\log x$ 의 지표이므로
 $f(\log x) = \log x - [x]$ 는 $\log x$ 의 가수를 나타낸다.
 $f(\log a) = 0$ 에서 $\log a$ 의 가수가 0 이므로
 $\log a = n$ (n 은 정수)
이때, $\log \frac{1}{a} = -\log a = -n$ 이므로 $\log \frac{1}{a}$ 의 가수는 0 이다.
즉, $f\left(\log \frac{1}{a}\right) = 0$
또, $f\left(\log \frac{1}{b}\right) = 0.6$ 에서 $\log \frac{1}{b}$ 의 가수가 0.6 이므로
 $\log \frac{1}{b} = m + 0.6$ (m 은 정수)
 $-\log b = m + 0.6$ 에서
 $\log b = -m - 0.6 = (-m - 1) + 0.4$ 이므로
 $\log b$ 의 가수는 0.4 이다.
즉, $f(\log b) = 0.4$
 $\therefore f\left(\log \frac{1}{a}\right) + f(\log b) = 0.4$

40. 사람의 기억력은 시간이 지남에 따라 점점 떨어진다. 현재의 기억량을 100이라 할 때, 현재의 기억량 중 t 개월이 지난 후까지 남은 양은 $\log_2 \frac{2^{100}}{(t+1)^k}$ (k 는 상수) 이라 한다. 9개월이 지난 후까지 남은 기억량이 현재 기억량의 $\frac{3}{4}$ 일 때, $10k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

현재 기억량을 100이라 할 때, 9개월이 지난 후까지 남은 기억량이 현재 기억량의 $\frac{3}{4}$ 이므로 $\log_2 \frac{2^{100}}{(9+1)^k} = \frac{3}{4} \times 100$

$$100 - k \log_2 10 = 75$$
$$k = \frac{25}{\log_2 10} = 25 \log_{10} 2 = 25 \times 0.3 = 7.5$$
$$\therefore 10k = 75$$