

1. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \therefore (가) = \frac{3}{2}$

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$ 의 값은?

① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 120 \quad \therefore 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a + 3d) + (a + 6d) = 2a + 9d = 24$$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$$\begin{aligned} & a_n \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{ 라 하면} \\ & a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32 \\ & \therefore 4a + 48d = 32 \\ & a + 12d = 8 \\ & S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ & = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ & = 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

4. 세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2x = 1 + 5 = 6 \quad \therefore x = 3$$

세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2 = 5$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 14$$

5. 다음 수열의 □안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \dots$

- ① $\frac{4}{21}$
- ② $\frac{8}{21}$
- ③ $\frac{10}{21}$
- ④ $\frac{14}{21}$
- ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

균으로 나눠 보면
 $\frac{1}{1}/\frac{1}{3}, \frac{2}{2}/\frac{3}{1}, \frac{1}{5}/\frac{2}{4}, \frac{3}{3}/\frac{4}{2}, \frac{5}{1}/$
따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.
 $\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$

6. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} = 2^a \times 3^b$ 일 때 $a + b$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$

② $\frac{5}{3}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ $\frac{5}{7}$

해설

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}} \\ & a = \frac{7}{6}, \quad b = \frac{1}{2} \\ & \therefore a + b = \frac{7+3}{6} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

7. 실수 a, b, c, d 에 대하여 $2^a = c, 2^b = d$ 일 때, 4^{a+b} 와 같은 것은?

- ① $\frac{1}{cd}$ ② $\frac{1}{2cd}$ ③ $\frac{1}{c^2d}$ ④ cd ⑤ c^2d^2

해설

$$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$$

8. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$$

9. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
 $\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
 $= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
 $\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

10. 다음 <보기>의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log 55$ 의 소수 부분과 같은 것의 개수를 구하면? (단, $\log 550 = 2.7404$)

보기

㉠ $\log 5.05$

㉡ $\log 0.00055$

㉢ $\log \frac{1}{550}$

㉣ $\log(5.5 \times 10^{10})$

㉤ $\log 5.5^{10}$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\log 550$ 의 진수 550과 소숫점의 위치만 다르고 숫자의 배열이 같은 수의 상용로그의 소수 부분은 $\log 550$ 의 소수 부분과 같다. 따라서 <보기> 중 $\log 550$ 과 소수 부분이 같은 것은 ㉡, ㉣의 2개이다.

11. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 값으로 옳은 것은?

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= x + y + 2\sqrt{xy} \quad (x > 0, y > 0) \\ &= 4 + 2 = 6 \\ \therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{6} \quad (\because \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0)\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}&\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

12. 등차수열을 이루는 세 수의 합은 12이고 세 수의 합은 12이고 제곱의 합은 66일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면

$$(a-d) + a + (a+d) = 12 \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 66 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립해서 풀면 $a = 4, d = \pm 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 세 수는 1, 4, 7이고 이 중 가장 큰 수는 7이다.

13. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 -2 , 3 일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 의 공차는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라고 할 때,

$$3a_n + 5b_n$$

$$= 3\{a + (n-1) \times (-2)\} + 5\{b + (n-1) \times 3\}$$

$$= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1)$$

$$= 3a + 5b + 9(n-1)$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 은 첫째항이 $3a + 5b$ 이고, 공차가 9 인 등차수열이다.

14. 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수의 합은?

① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면
2, 5, 8, $\dots$, 98이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을
이룬다.

이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n - 1) \times 3 = 3n - 1$$

이때, 끝항 98은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98은 제 33
항이다.

따라서 구하는 합을 S 라 하면

$$S = \frac{33(2 + 98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$$

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2S_n$ 으로 정의될 때, a_{10} 의 값은? (단, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

- ① $3 \cdot 2^8$
- ② $3 \cdot 2^9$
- ③ $3 \cdot 2^{10}$
- ④ $2 \cdot 3^9$
- ⑤ $2 \cdot 3^{10}$

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로 $S_{n+1} - S_n = 2S_n$
즉, $S_{n+1} = 3S_n$ 이므로 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 3 인 등비수열이다.
 $\therefore S_n = 3^n$
 $a_{10} = S_{10} - S_9 = 3^{10} - 3^9 = 2 \cdot 3^9$

해설

$a_1 = 3, a_2 = 6$
 $a_{n+1} = 2S_n \cdots \textcircled{1}, a_n = 2S_{n-1} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 식에서 $\textcircled{2}$ 식을 빼보면,
 $a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$ (단, $n \geq 2$)
 $a_{n+1} = 3a_n$ (단, $n \geq 2$)
따라서 $a_n = 3^{n-2} \cdot a_2 = 2 \cdot 3^{n-1}$ (단, $n \geq 2$)
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

16. $S = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k$ 일 때, $\frac{1}{5}S$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 10 \\ &= 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \\ \therefore \frac{1}{5}S &= 77 \end{aligned}$$

17. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 56$ 을 만족시키는 n 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &\stackrel{=}{\Rightarrow}, \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \circ] \text{므로} \\ &n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ &\therefore n = 6 \end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 1, 3, 7, 15, 31, $\dots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항이 $b_n = \alpha^n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$ 이다. 이때, 실수 α, β, γ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\} : 1, 3, 7, 15, 31, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} & \vee & \vee & \vee & \vee & & \\ & 2 & 4 & 8 & 16 & \cdots & \rightarrow b_n = 2^n \end{array}$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$$

19. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

20. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

- $a_1 = 1, a_2 = 2$
- $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore p = 3, q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

21. $a = 2^{12}$ 일 때, $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$$

$a = 2^{12}$ 이므로

$$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$$

22. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

- ① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$
④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$
 $B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$
 $C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$
 $C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로
 $\therefore C < A < B$

23. 다음 세 수에 대한 상용로그의 정수 부분의 합과 소수 부분의 합을 차례대로 나열한 것은?

0.02, 200, 2500

- ① 3, $\log_{10} 2$
- ② 3, $\log_{10} 6.5$
- ③ 3, 1
- ④ 4, 0
- ⑤ 4, $\log_{10} 6.5$

해설

$\log_{10} 0.02 = -2 + \log_{10} 2$,
 $\log_{10} 200 = 2 + \log_{10} 2$,
 $\log_{10} 2500 = 3 + \log_{10} 2.5$
정수 부분의 합은 $-2 + 2 + 3 = 3$
소수 부분의 합은 $\log_{10} 2 + \log_{10} 2 + \log_{10} 2.5 = 1$

24. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

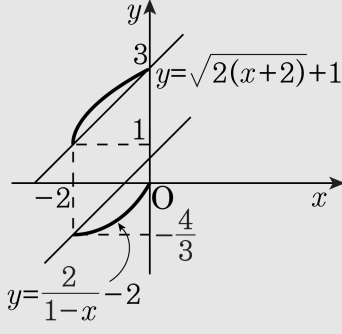
25. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$, $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 에 대하여 $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 과 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x + r$ 의 그래프가

$y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프보다

위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$

26. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $-5 < d < -4$
㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$
㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$
 $S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$
 $10 - 2d + 4d > 0$
 $\therefore d > -5$
 $S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$
 $2(10 - 2d) + 9d < 0$
 $\therefore d < -4$
 $\therefore -5 < d < -4$ (참)
㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$
㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로
 $0 < 10 + 2d < 2$
즉, $0 < a_5 < 2$
 $a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$
 $-15 < 3d < -12$ 이므로
 $-5 < 10 + 3d < -2$
즉, $-5 < a_6 < -2$
 $\therefore a_5 > 0$, $a_6 < 0$ (참)
㉢ $a_1 = 10 - 2d$ 이므로
 $-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$
즉, $18 < a_1 < 20$
 a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$
 $a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\frac{9}{2}$
 $\therefore a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$
 $\therefore a_1 + a_9 = 2 \neq 0$ (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

27. 등비수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $|S_n - 1| < 0.001$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$
$$\therefore |S_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$
$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

1000 < 2ⁿ 인 n의 최솟값을 구하면 된다.
그런데 2¹⁰ = 1024, 2⁹ = 512 이므로 2ⁿ > 1000 인 n의 최솟값은 10

28. $a_1 = 1$, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{1}{45}$ ② $\frac{1}{46}$ ③ $\frac{1}{47}$ ④ $\frac{1}{48}$ ⑤ $\frac{1}{49}$

해설

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n \text{ 이므로 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$$

$$a_{10} = \frac{2}{10^2 - 10 + 2} = \frac{1}{46}$$

29. $x = \log_4 28$ 에 가장 가까운 정수를 y 라 할 때, $2^x + 2^y$ 의 값은?

① 32

② $\sqrt{30}$

③ $4 + 2\sqrt{7}$

④ 24

⑤ 28

해설

$$x = \log_4 28 = \log_4 4 \cdot 7 = 1 + \log_4 7$$

$$\log_4 4 < \log_4 7 < \log_4 16$$

$$y = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} 2^x + 2^y &= 2^{\log_4 28} + 2^2 = 28^{\log_4 2} + 4 \\ &= 28^{\frac{1}{2}} + 4 \\ &= 2\sqrt{7} + 4 \end{aligned}$$

30. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 9ax + 81 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\log_3 \frac{1}{|\alpha|}, \log_3 \frac{1}{|\beta|}$ 일 때, $\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta}$ 의 값을 구하면?(단, $ab \neq 0$)

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$x^2 - 9ax + 81 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 9a, \alpha\beta = 81$

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\log_3 \frac{1}{|\alpha|}, \log_3 \frac{1}{|\beta|}$ 이므로

$$\log_3 \frac{1}{|\alpha|} + \log_3 \frac{1}{|\beta|} = -a$$

$$\log_3 \frac{1}{|\alpha|} + \log_3 \frac{1}{|\beta|} = \log_3 \frac{1}{|\alpha\beta|} = \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$$

$$\therefore a = 4$$

$$\text{따라서 } \alpha + \beta = 36 \text{ 이므로 } \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = \frac{3(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{4}{3}$$

31. $a < 0, b < 0$ 이고 $x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 일 때, $\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$ 를 a, b 로 나타내면?

- ① $\frac{b}{a}$ ② $\frac{a}{b}$ ③ $\frac{b}{2a}$ ④ $-\frac{2a}{b}$ ⑤ $\frac{a}{2b}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}} \\ &= \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} (\because a < 0, b < 0) \\ \therefore \sqrt{1+x^2}-x &= \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-a}{\sqrt{ab}} \\ \sqrt{1+x^2}+x &= \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-b}{\sqrt{ab}} \\ \therefore \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} &= \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

32. 함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를 갖고 $f(1) = 1$, $g(\sqrt{x+a}-1) = x+b$ 일 때 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

g 가 f 의 역함수이므로 $g = f^{-1}$
 $f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b$ 에서
 $\sqrt{x+a}-1 = f(x+b)$
양변에 x 대신 $x-b$ 를 대입하면
 $\sqrt{(x-b)+a}-1 = f(x-b+b)$
 $\therefore f(x) = \sqrt{x+a-b}-1$
 $f(1) = 1$ 이므로
 $f(1) = \sqrt{1+a-b}-1 = 1$
 $\sqrt{1+a-b} = 2, 1+a-b = 4$
 $\therefore a-b = 3$

33. 무리함수 $y = \sqrt{x+2} + 2$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha, y = \beta$ 라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x+2} + 2, y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같이 그 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근

은

$y = x$ 를 만족한다. ($\alpha = \beta$)

따라서, $y = \sqrt{x+2} + 2$ 와 $y = x$ 를 연립하면

된다.

$$x = \sqrt{x+2} + 2 \text{에서 } x - 2 = \sqrt{x+2}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x + 2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha \ (\because \alpha = \beta)$$

$$= -2$$

