

1. 다음 보기 중 집합은 모두 몇 개인가?

보기

- ㉠ 우리나라의 놀이공원의 모임
- ㉡ 머리가 긴 가수들의 모임
- ㉢ 10에 가까운 수들의 모임
- ㉣ 큰 자동차들의 모임
- ㉤ 1보다 작은 자연수의 모임
- ㉥ 6의 배수의 모임

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ ‘긴’이라는 단어가 명확한 기준이 없으므로 집합이 될 수 없다.
- ㉡ ‘가까운’이라는 단어는 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉢ ‘큰’이라는 단어는 사람에 따라 그 기준이 달라지므로 집합이 될 수 없다.

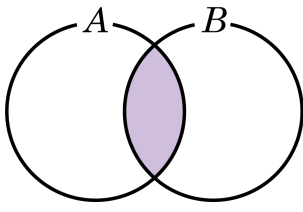
2. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{\emptyset\} \subset \emptyset$
- ② $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\}$ 이면, $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$ 이다.
- ④ $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 4\} \subset B$
- ⑤ $\{4, 5\} \subset \{5, 4\}$

해설

- ① $\{\emptyset\} \not\subset \emptyset$

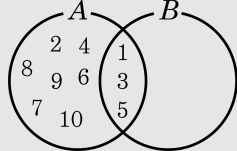
3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 일 때, 다음과 같은 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{3, 5\}$
④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{1, 3, 5, 10\}$

해설

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{1, 3, 5\}$ 이다.

4. 미란이는 두 집합의 연산을 이용하여 새로운 집합을 만드는 탐구를 하다가 $A - B = \{2, 6\}$ 인 새로운 집합을 만든 원래의 두 집합 $A = \{2, 3, 4, b\}$, $B = \{3, a, 5, 7\}$ 을 발견하였다. 이 때, 원소 a, b 를 찾아 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 10$

해설

$A - B \subset A$ 이고 $A - B = \{2, 6\}$ 이므로 $b = 6$ 이다. $A \cap B = \{3, 4\}$ 이므로 $a = 4$ 이다. 따라서 $a + b = 10$ 이다.

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

6. 두 함수 f, g 가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x - 1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ -15 ④ -24 ⑤ -29

해설

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$$2x - 1 = 5 \text{ 에서 } x = 3 \text{ 이므로}$$

$$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$$

$$\therefore (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$$

7. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

- ㉠ $f \circ g = g \circ f$
- ㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$
- ㉤ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉤ ③ ㉢, ㉤
- ④ ㉠, ㉡, ㉤ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.
 $\therefore$ 옳지 않다.
- ㉡ 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.
 $\therefore$ 옳다.
- ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
 $= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
 $= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
 $\therefore$ 옳지 않다.
- ㉤ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
 $f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
 $\therefore g = f^{-1} \therefore$ 옳다.

8. $3x = 2y \neq 0$ 일 때, $\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\frac{5}{12}$

② $\frac{12}{5}$

③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{12}{7}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$3x = 2y \neq 0$ 에서 $x : y = 2 : 3$

따라서 $x = 2k$, $y = 3k$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \frac{3(2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 3k}{(2k)^2 + 2k \cdot 3k}$$

$$= \frac{12k^2 + 12k^2}{4k^2 + 6k^2} = \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{12}{5}$$

9. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

- ① $-2 \leq x \leq 1$ ② $0 \leq x \leq 1$ ③ $1 < x < 2$
④ $-1 \leq x \leq 2$ ⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 0 \quad \therefore x \geq -1 \\ 2-x &\geq 0 \quad \therefore x \leq 2 \\ x-1 &\geq 0 \quad \therefore x \geq 1 \\ \text{공통부분을 구하면 } 1 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

10. 세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2x = 1 + 5 = 6 \quad \therefore x = 3$$

세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2 = 5$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 14$$

11. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 이 정의역인 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = -x^3 + a$ 가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

i) $f(1) = g(1)$ 에서 $a + b = -1 + a$

$$b = -1$$

ii) $f(0) = g(0)$ 에서 $a = b$

$$a = -1$$

$$\therefore ab = (-1)(-1) = 1$$

12. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때, $g : X \rightarrow X$ 에 대하여 $g(1) = 3$ 이고 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $g(2) < g(3) < g(4)$
- ② $g(2) < g(4) < g(3)$
- ③ $g(3) < g(2) < g(4)$
- ④ $g(3) < g(4) < g(2)$
- ⑤ $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ 임을 이용하여
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \ (\therefore f \circ g = g \circ f)$
 $\therefore g(2) = 4$
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$
 $\therefore g(3) = 1$
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$
 $\therefore g(4) = 2$
 $\therefore g(3) < g(4) < g(2)$

13. $a + b + c = 1$ 일 때, $\frac{a^2 - 1}{b + c} + \frac{b^2 - 1}{c + a} + \frac{c^2 - 1}{a + b}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 - 1}{b + c} + \frac{b^2 - 1}{c + a} + \frac{c^2 - 1}{a + b} \\ &= \frac{(a - 1)(a + 1)}{b + c} + \frac{(b - 1)(b + 1)}{c + a} \\ &+ \frac{(c - 1)(c + 1)}{a + b} \end{aligned}$$

그런데 $a + b + c = 1$ 이므로

$$a - 1 = -(b + c), \quad b - 1 = -(c + a), \quad c - 1 = -(a + b)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= -(a + 1) - (b + 1) - (c + 1) \\ &= -(a + b + c) - 3 = -1 - 3 = -4 \end{aligned}$$

14. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

15. $\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}} &= \sqrt{\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{y}\end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 + 3 = 5$$

16. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4}-3$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
 $y = \sqrt{-2(x-1)+a+b} = \sqrt{-2x+2+a+b}$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4}-3$ 과 같으므로
 $2+a=4, b=-3$
 $\therefore a=2, b=-3$

17. 8과 27사이에 두 수 x, y 를 넣었더니 8, $x, y, 27$ 이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, $x, y, 27$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 8$$

$$a_4 = a_1 r^3 = 27, \quad 8r^3 = 27$$

$$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

$$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$$

18. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^6 (-1)^k k = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6$

② $\sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{63}{64}$

③ $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1)$

④ $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{9}{10}$

⑤ $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$

해설

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

19. $x_i \in \{0, 1, 2\}$ 이고, $\sum_{i=1}^n x_i = 20$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 34$ 일 때, $\sum_{i=1}^n x_i^3$ 의 값은?

① 62 ② 74 ③ 86 ④ 98 ⑤ 110

해설

x_i 중 1을 a 개, 2를 b 개 택한다면

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \times a + 2 \times b = 20 \quad \therefore a + 2b = 20 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1^2 \times a + 2^2 \times b = 34 \quad \therefore a + 4b = 34 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $a = 6$, $b = 7$

$$\therefore \sum_{i=1}^n x_i^3 = 1^3 \times 6 + 2^3 \times 7 = 6 + 56 = 62$$

20. 수열 $1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 제125항은?

- ① $\frac{15}{16}$
- ② $\frac{7}{8}$
- ③ $\frac{13}{16}$
- ④ $\frac{3}{4}$
- ⑤ $\frac{11}{16}$

해설

이 수열을 다음과 변형해서 분모가 같은 것까지 묶으면 군수열이 만들어진다.

(1), $\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right), \dots$

따라서 제 n 군까지의 항수는

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고,

$\frac{15 \times 16}{2} = 120$ 이므로

제125항은 제16군의 5번째 항이 된다.

제16군은

$\left(\frac{16}{16}, \frac{15}{16}, \frac{14}{16}, \frac{13}{16}, \frac{12}{16}, \frac{11}{16}, \dots, \frac{1}{16}\right)$ 이므로

제125항은 5번째 항인 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 이다.

21. $a > 0$, $a \neq 1$ 이고 $x > 0$, $y > 0$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\log_a a = 1$

② $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

③ $\log_a(x - y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

④ $\log_a x^y = y \log_a x$

⑤ $\log_a 5 \cdot \log_5 a = 1$

해설

③ $\log_a(x - y) \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$

⑤ $\log_a 5 \cdot \log_5 a = \log_a 5 \cdot \frac{1}{\log_a 5} = 1$

22. 보기 중 유리수인 것은 모두 몇 개인가?

$$\begin{array}{l} \sqrt{10^{\log_{10} 4}}, \quad \sqrt{10^{\frac{1}{2}}}, \quad 2^{-10}, \quad 10^{-\frac{1}{2}}, \\ \sqrt{2^{-\log_2 4}}, \quad (\log_2 16)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\mathcal{Q}$ 를 유리수의 집합이라 하자.

$$\sqrt{10^{\log_{10} 4}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_{10} 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2 \in \mathcal{Q}$$

$$\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{4}} \notin \mathcal{Q}$$

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} \in \mathcal{Q}$$

$$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \notin \mathcal{Q}$$

$$\sqrt{2^{-\log_2 4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_2 \frac{1}{2}} = 2^{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \in \mathcal{Q}$$

$$(\log_2 16)^{\frac{1}{2}} = (\log_2 2^4)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \in \mathcal{Q}$$

따라서, 유리수인 것은 4개다.

23. $\log x$ 의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 α 라 할 때 $n+8\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\log x = 3 + \beta \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \log x = 1 + \frac{\beta}{3}$$

$$\therefore \beta + \frac{\beta}{3} = 1$$

$$\therefore \beta = \frac{3}{4}$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3 + \alpha) = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{4}$$

$$n = 2, \alpha = \frac{1}{4}$$

$$n + 8\alpha = 2 + 2 = 4$$

24. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n + 1, n = 0, 1\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?
- ① $C \subset A \subset B$ ② $A \subset B \subset C$ ③ $B \subset A \subset C$
④ $C \subset B \subset A$ ⑤ $A \subset C \subset B$

해설

$B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3\}$
따라서 $C \subset B \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

25. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 120

해설

‘적어도~’문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$

$\therefore 128 - 8 = 120$

26. A 반 학생 60 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 33 명, 영어를 좋아하는 학생은 30 명이고, 수학과 영어 중 한 과목만 좋아하는 학생은 29 명이라고 한다. 이때, 수학과 영어도 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 14 명

해설

수학을 좋아하는 학생의 수 : $n(A) = 33$,
영어를 좋아하는 학생의 수 : $n(B) = 30$
 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29$,
 $n(A \cap B) = (33 + 30 - 29) \div 2 = 17$,
 $n(A \cup B) = 46$
 $\therefore n(U) - n(A \cup B) = 14$ (명)

27. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

- ① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로
 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$
 $((g \circ f) \circ g)(x) = (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x - 3)$
 $= g(f(x - 3))$
 $= g(2(x - 3) + 1) = g(2x - 5)$
 $= (2x - 5) - 3 = 2x - 8$
 $2x - 8 = ax + b$ 에서 $a = 2, b = -8$
 $\therefore a + b = -6$

28. 첫째항이 1000이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 곱을 Π_n , 즉, $\Pi_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 이라 할 때, Π_n 이 최대가 될 때의 n 의 값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

첫째항이 1000이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은

$a_n = 1000 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

어떤 수에 1보다 큰 값을 곱하면 곱은 커지고, 1보다 작은 값을 곱하면 곱이 작아지므로

$a_n \geq 1$ 인 모든 항들을 곱할 때 Π_n 은 최댓값을 갖는다.

따라서, $a_n = 1000 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 에 대하여

$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ 이므로

$n-1 \leq 9$, 즉, $n \leq 10$ 일 때, $a_n \geq 1$ 을 만족한다.
그러므로 Π_n 이 최대가 될 때의 n 의 값은 10이다.

29. 분모가 $n(n = 1, 2, 3, \dots, 100)$ 일 때, 분자가 $1, 2, 3, \dots, n$ 인 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \dots,$ $\frac{100}{100}$ 이 있다. 이 수열에서 $\frac{1}{k}$ 과 값이 같은 항의 개수를 $a_k(k = 1, 2, 3, 4, \dots, 100)$ 이라 할 때, $a_k = 7$ 을 만족하는 k 의 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$a_k = 6$ 의미는 $\frac{1}{k}$ 과 값이 같은 항의 개수가 6 개

라는 의미이다.

$a_1 : 1$ 과 같은 항의 개수는 100 개

$\therefore a_{100} = 100$

$a_2 : \frac{1}{2}$ 와 같은 항의 개수이므로

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{50}{100}$ 의 50 개

$\therefore a_2 = 50$

이런 식으로 하면

$a_3 = 33, a_4 = 25, a_5 = 20, \dots, a_{13} = 7$

, $a_{14} = 7, a_{15} = 6$

따라서 $a_{13} = a_{14} = 7$ 이므로 $k = 13$ 또는 $k = 14$

$\therefore 13 + 14 = 27$

30. $f(x)$ 는 양수 x 의 상용로그의 정수 부분을 나타낸다고 한다.

이때, $f(x) + f(3) + f(5) + \cdots + f(2015)$ 의 값을 구하면?

- ① 2467 ② 2468 ③ 2469 ④ 2470 ⑤ 2471

해설

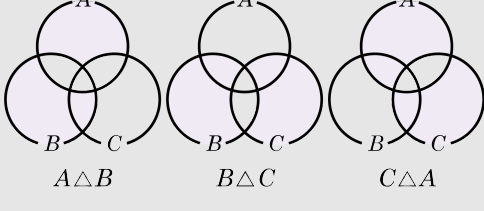
$$\begin{aligned} f(1) &= f(3) = \cdots = f(9) = 0 \\ f(11) &= \cdots = f(99) = 1 \\ f(101) &= \cdots = f(999) = 2 \\ f(1001) &= \cdots = f(2015) = 3 \\ 5 \times 0 + 45 \times 1 + 450 \times 2 + 508 \times 3 \\ &= 45 + 900 + 1524 = 2469 \end{aligned}$$

31. 집합 X, Y 에 대하여 $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 라 하자. 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 90, n(A \Delta B) = 40, n(B \Delta C) = 36, n(C \Delta A) = 58$ 일 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하면?

- ① 15
- ② 17
- ③ 21
- ④ 23
- ⑤ 25

해설

다음 벤 다이어그램에서 $n(A \Delta B) + n(B \Delta C) + n(C \Delta A) = 2 \times \{n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)\}$
 $\therefore 40 + 36 + 58 = 2 \times \{90 - n(A \cap B \cap C)\}$
 $\therefore n(A \cap B \cap C) = 23$



32. 양수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + 3z = 6$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}
 & 6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \right) \\
 &= (x + 2y + 3z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \right) \\
 &= 3 + \left(\frac{2y}{x} + \frac{x}{2y} \right) + \left(\frac{3z}{2y} + \frac{2y}{3z} \right) + \left(\frac{x}{3z} + \frac{3z}{x} \right) \\
 &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{2y}} + 2 \sqrt{\frac{3z}{2y} \cdot \frac{2y}{3z}} + 2 \sqrt{\frac{x}{3z} \cdot \frac{3z}{x}} \\
 &= 9 \text{ (단, 등호는 } x = 2y = 3z = 2 \text{ 일 때 성립)} \\
 &\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \text{ 의 최솟값은 } \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

33. 3^{37} 은 m 자리의 자연수이고, 최고 자리의 숫자는 n 이다. 이때, $m+n$ 의 값은?

① 19

② 80

③ 21

④ 22

⑤ 23

해설

$\log 3^{37} = 37 \log 3 = 37 \times 0.4771 = 17.6527$
 $\log 3^{37}$ 의 지표가 17이므로 3^{37} 은 18자리의 수이다.
 $\therefore m = 18$
 $\log 3^{37}$ 의 가수가 0.6527이고
 $\log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$,
 $\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$ 이므로
 $\log 4 < 0.6527 < \log 5$
 $17 + \log 4 < 17.6527 < 17 + \log 5$
 $\log(4 \times 10^{17}) < \log 3^{37} < \log(5 \times 10^{17})$
따라서 $4 \times 10^{17} < 3^{37} < 5 \times 10^{17}$ 이므로
 3^{37} 의 최고 자리의 숫자는 4이다.
 $\therefore n = 4$
 $\therefore m+n = 18+4 = 22$