1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{20}의 값은?

① 38　　② 39　　③ 41　　④ 42　　⑤ 43

해설

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$

$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$

$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$

$\therefore\ a_{20} = 439 - 398 = 41$

2. a, -6, b, -12가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

b는 -6과 -12의 등차중항이므로

$b = \frac{-6+(-12)}{2} = -9$

따라서 이 수열은 공차가 -3인 등차수열이다.

$a+(-3) = -6$에서 $a = -3$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$

3. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$

$= \dfrac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$

4. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400　② 425　③ 450　④ 475　⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$\therefore$ (준 식) $=\sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$

$=5\times 55+150=425$

5. 다음 수열에서 $a+b$의 값을 구하여라.

$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ a,\ b,\ \cdots$

▶ 답:

▷ 정답: 38

해설

$1,\quad 2,\quad 4,\quad 7,\quad 11,\quad 16,\quad 22$

$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$\therefore a=16,\ b=22$

$a+b=16+22=38$

6. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, a_3+a_4의 값은?

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{6},\ a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}\,(n=1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1}=3,\ \frac{1}{a_2}=6$이므로

$\frac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 3=3n,\ a_n=\frac{1}{3n}$

$a_3=\frac{1}{9},\ a_4=\frac{1}{12}\quad\therefore\ a_3+a_4=\frac{7}{36}$

7. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -3 은 -27 의 세제곱근이다.

② 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이다.

③ $-\sqrt[4]{81} = -3$

④ $\sqrt[4]{-16} = -2$

⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt[4]{-16} = \pm - 2$

8. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

9. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a에 관한 식으로 나타내면?

① a^2　　② $a^{\frac{5}{2}}$　　③ a^3　　④ $a^{\frac{7}{2}}$　　⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$a = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \therefore\ 2 = a^{\frac{1}{6}}$

$8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}}$

10. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$
② $\log_{\sqrt{5}} 25$
③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$
④ $\log_{\frac{1}{3}} 81$
⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{1} \log_5 5 = 4$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 2^{-4} = \frac{-4}{-1} \log_2 2 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 5}$

$= \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4$

$= 4 \log_2 2 = 4$

11. 다음 식이 성립하는 실수 x의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$가 성립되지 않는 범위는
$x+1<0$ 이고 $x-2<0$
$\therefore\ x<-1$
따라서 $x<-1$일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.
$\{x \mid x<-1\}$의 여집합 되어야 하므로
$\{x \mid x \geq -1\}$이고 실수 x의 최솟값은 $\therefore\ -1$

12. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$에 대하여 x의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $x + a - \frac{1}{b}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times$

정수 부분 $a = 1$, 소수 부분 $b = x - a = \sqrt{5} - 2$

$x + a - \frac{1}{b} = \sqrt{5} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$

$= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2$

13. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab > \ 0$ 이면 제 3사분면

② $ab < \ 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로
제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0\ )$ 이므로
제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

14. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \dfrac{1}{4}$

$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9$, $a-1 = 3$, $a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

15. 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 역함수를 구하면?

① $y=x^2+3$　② $y=\sqrt{x+3}$

③ $y=x^2-3$　④ $y=x^2-3\ (x \leq 1\ )$

⑤ $y=x^2+3\ (x \geq 0\ )$

해설

$y=\sqrt{x-3}$의 정의역과 치역은

각각 $x \geq 3,\ y \geq 0$이고 양변을 제곱하면

$y^2=x-3,\ x=y^2+3$

$\therefore\ y=x^2+3\ (x \geq 0,\ y \geq 3\ )$

16. 첫째항이 35 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 제 11 항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$ 이므로 $d = -9$

$\therefore S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$= \dfrac{10(70-81)}{2}$

$= \dfrac{-110}{2} = -55$

17. 어떤 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이 145, 제 11항부터 제 20항까지의 합이 445이다. 이 등차수열의 제 21항부터 제 30항까지의 합은?

① 645 ② 680 ③ 715 ④ 745 ⑤ 780

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2} = 145 \quad \therefore \ 2a+9d = 29 \cdots ㉠$

$S_{20} = \dfrac{20(2a+19d)}{2} = 145+445 = 590$

$\therefore \ 2a+19d = 59 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=3, \ a=1$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$S_{30} - S_{20} = \dfrac{30(2\cdot 1+29\cdot 3)}{2} - 590 = 745$

18. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 + a_6$ 의 값은?

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

해설

$S_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$S_{n-1} = (n-1+1)^2 = n^2$

$a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \ (n \geq 2)$

$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$

19. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + kx - 8 = 0$의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a + ar + ar^2 = 7$에서

$a(1 + r + r^2) = 7$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + a \cdot ar^2 = k$에서

$a^2 r(1 + r + r^2) = k$ $\cdots\cdots$ ㉡

$a \cdot ar \cdot ar^2 = 9$에서 $(ar)^3 = 8$

$\therefore ar = 2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$k = a(1 + r + r^2) \cdot ar = 7 \times 2 = 14$

$\therefore k = 14$

20. 수열 $1\cdot1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　　② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

21. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1}-1$ ② $\sqrt{n+1}-1$ ③ $\sqrt{n+1}$
④ $\sqrt{n+1}+1$ ⑤ $\sqrt{2n+1}+1$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1}-1$

22. 수열 $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\cdots$ 의 첫째항부터 제 150 항까지에서 $\frac{1}{2}$ 은 몇 번 나타나는가? (단, 약분해서 $\frac{1}{2}$ 인 것을 포함한다.)

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

주어진 수열을 군수열로 나타낼 수 있다.

$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\right),\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\right),\cdots$

제 n군의 항의 개수는 n개이고,

$\frac{16\cdot 17}{2}=136,\ \frac{17\cdot 18}{2}=153$ 이므로 제150 항은 제17 군의 14 번째 항이다. $\frac{1}{2}$는 제2군, 제4군, 제6군,$\cdots$, 제16 군에서 1 번씩 나타나므로 모두 8 번 나타난다.

23. $\log \dfrac{x}{4.71} = 1.9812$ 를 만족하는 양수 x 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	$\cdots$
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	$\cdots$
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$ 의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \dfrac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$ 이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$ 이므로 $x = 451$

24. $x=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$에 대하여 $x^3+x^2+x+1=a\sqrt{3}+b$가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$x=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$2x+1=\sqrt{3}$, $(2x+1)^2=3$

$\therefore\ 2x^2+2x-1=0$

$\therefore\ x^3+x^2+x+1$

$$=(2x^2+2x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{2}x+1$$

$$=\frac{3}{2}x+1=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}=a\sqrt{3}+b$$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

25. 갑은 2001년 말부터 2012년까지 매년 초에 300만원 씩 모두 12회를 금융기관에 적립한 것을 2012년 말에 그 원리금을 모두 인출하고 그대로 2013년 초에 금융기관에 다시 예금하여 12년 동안 두었다가 2024년 말에 그 원리금을 모두 인출하기로 하였다. 이때, 갑이 2024년말에 인출한 원리금액은?(단, 연이율 6%의 복리로 하고, $1.06^{12} = 2.01$로 계산한다.)

① 약 10540만 원　② 약 10650만 원　③ 약 10760만 원
④ 약 10870만 원　⑤ 약 10980만 원

해설

2012년 말의 원리금 S_{12}를 구하면
$S_{12} = 300 \times 1.06 + 300 \times 1.06^2 + \cdots + 300 \times 1.06^{12}$
$= \dfrac{300 \times 1.06 \times (1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1}$
$= \dfrac{300 \times 1.06 \times 1.01}{0.06} = 5353$(만원)
따라서 2024년 말의 원리금을 구하면
$S_{24} = S_{12} \times 1.06^{12}$
$= 5353 \times 2.01 = 10759.53$(만 원)
따라서 구하는 금액은 약 10760만 원이다.

26. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (n+2)a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의될 때, $a_n > 100$을 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$이라 하면 $3S_n = (n+2)a_n \cdots\cdots$ ㉠

$3S_{n-1} = (n+1)a_{n-1} \cdots\cdots$ ㉡

$S_n - S_{n-1} = a_n$이므로㉠-㉡에서

$3(S_n - S_{n-1}) = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$

$3a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{n+1}{n-1}a_{n-1} \cdots\cdots$ ㉢

㉢의 양변에 $n = 2,\ 3,\ 4, \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2 = \dfrac{3}{1}a_1$

$a_3 = \dfrac{4}{2}a_2$

$a_4 = \dfrac{5}{3}a_3$

$\vdots$

$\underline{)\ a_n = \dfrac{n+1}{n-1}a_{n-1}}$

$a_n = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{n+1}{n-1}a_1$

$\therefore a_n = \dfrac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

이때, $\dfrac{n(n+1)}{2} > 100$에서 $\dfrac{13 \cdot 14}{2} = 91,\ \dfrac{14 \cdot 15}{2} = 105$이므로

$n = 14$

27. $a_2 = 3a_1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_8 = 243$일 때, a_{15}의 값은?

① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$에서
$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
즉, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_1 \cdot 3^{k-1}$
$= a_1 + 2a_1 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$
$= a_1 + 2a_1 \dfrac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$
$a_8 = a_1 \cdot 3^7 = 243 = 3^5$에서 $a_1 = 3^{-2}$
$\therefore\ a_{15} = 3^{-2} \cdot 3^{14} = 3^{12}$

28. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다.
(ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

자연수는 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열을 이루므로 $p(1)$이 참임을 증명한다.
k가 자연수이면 그 다음 자연수는 $k+1$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+1)$이 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=1,\ \ b=1$
$\therefore a+b=2$

29. 임의의 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$, 소수 부분을 $g(x)$로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(123) + 1 = f(12.3) + 2$

㉡ $f(x) = 2$를 만족하는 자연수 x의 개수는 999개이다.

㉢ $g(x) + g(y) = 1$이면 $\log x + \log y$는 정수이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 123은 세 자리의 정수이므로 $f(123) = 2$
12.3의 정수 부분은 두 자리의 수이므로 $f(12.3) = 1$
$\therefore\ f(123) + 1 = f(12.3) + 2 = 3$(참)

㉡ $f(x) = 2$이므로 $\log x$에서 x의 정수 부분은 세 자리의 수이다.
따라서 $100 \le x < 1000$이므로 구하는 자연수 x의 개수는 $999 - 99 = 900$(개)(거짓)

㉢ $\log x$의 소수부분과 $\log y$의 소수 부분의 합이 1이면 $\log x + \log y$는 정수이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

30. $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ 일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{k=1}^{18} \log a_k = 1$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{18} (\log a_k + \log_{k+1}) = \log 70$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{18} (\log a_k - \log a_{k+1}) = \log \dfrac{21}{2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $\sum_{k=1}^{18} \log a_k = \log(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{18})$
$= \log\left(\dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{4} \times \cdots \times \dfrac{20}{19}\right)$
$= \log 10 = 1$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{18} (\log a_k + \log a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{18} \log a_k a_{k+1}$
$= \sum_{k=1}^{18} \log \dfrac{k+2}{k+1} \cdot \dfrac{k+3}{k+2}$
$= \sum_{k=1}^{18} \log \dfrac{k+3}{k+1}$
$= \log\left(\dfrac{4}{2} \times \dfrac{5}{3} \times \dfrac{6}{4} \times \cdots \times \dfrac{21}{19}\right)$
$= \log \dfrac{20 \times 21}{2 \times 3} = \log 70$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{18} (\log a_k - \log a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{18} \log \dfrac{a_k}{a_{k+1}}$
$= \log\left(\dfrac{a_1}{a_2} \times \dfrac{a_2}{a_3} \times \dfrac{a_3}{a_4} \times \cdots \times \dfrac{a_{18}}{a_{19}}\right)$
$= \log \dfrac{a_1}{a_{19}} = \log\left(\dfrac{3}{2} \times \dfrac{20}{21}\right) = \log \dfrac{10}{7}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

31. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$이고 곱이 32일 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$의 값은?

① $\frac{31}{4}$ ② $\frac{31}{8}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{31}$ ⑤ $\frac{4}{31}$

해설

$S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}=\frac{31}{2}$

$a(r^4+r^3+r^2+r+1)=\frac{31}{2}$

또한 $a\cdot ar\cdot ar^2\cdot ar^3\cdot ar^4=32$

$a^5r^{10}=32$

$(ar^2)^5=2^5$

$ar^2=2,\ a=\frac{2}{r^2}$

그런데

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$

$=\frac{1}{ar^4}(r^4+r^3+\cdots+1)$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot(r^4+\cdots+1)$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{31}{2}\cdot\frac{1}{a}$

$=\left(\frac{r^2}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\frac{31}{2}=\frac{31}{8}$

32. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $n \le \log_a b < n+1$(n은 정수)이 성립할 때, $f(a,\ b) = n$으로 정의한다. 옳은 내용을 보기에서 고른 것은?

보기

㉠ $f(2,\ 9) = 4$ 이다.

㉡ $f(a,\ b) = 2$ 이면 $f(b,\ a) = 0$ 이다.

㉢ $f(a,\ b) = -2$ 이면 $f(b,\ a) = -1$이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $3 < \log_2 9 < 4$ 이므로 $f(2,\ 9) = 3$ (거짓)

㉡ $f(a, b) = 2$이면 $2 \le \log_a b < 3$

$\frac{1}{3} < \log_b a \le \frac{1}{2} \quad \therefore f(b,\ a) = 0$ (참)

㉢ $f(a,\ b) = -2$ 이면 $-2 \le \log_a b < -1$

$-1 < \log_b a \le -\frac{1}{2} \quad \therefore f(b,\ a) = -1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

33. 이차방정식 $ax^2-(3a-1)x+a+1=0$의 두 근이 $[\log A]$, $\log A-[\log A]$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)이라하면

$[\log A] = n$

$\log A - [\log A] = n + \alpha - n = \alpha$

$n + \alpha = \frac{3a-1}{a}$, $n\alpha = \frac{a+1}{a}$

$n + \alpha = 3 - \frac{1}{a} = 2 + 1 - \frac{1}{a}$

$a > 1$ 이므로

$0 < \frac{1}{a} < 1$

$-1 < -\frac{1}{a} < 0$

$0 < 1 - \frac{1}{a} < 1$ 이므로

$2 = n$, $1 - \frac{1}{a} = \alpha$

$2 \cdot (1 - \frac{1}{a}) = \frac{a+1}{a}$

$2 - \frac{2}{a} = 1 + \frac{1}{a}$

$1 = \frac{3}{a}$ $\quad \therefore\ a = 3$