1. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

1, 5, 9, (　　), 17

① 10　　② 11　　③ 13　　④ 14　　⑤ 16

해설

나열된 각 수는 $4n+1$ 의 꼴이다.
따라서 (　　) 안에 들어갈 수는 $9+4=13$ 이다.

2. 첫째항이 8, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n+1$　　② $-7n+15$　　③ $-7n-15$

④ $7n+15$　　⑤ $7n-15$

해설

$a_n = 8 + (n-1)\cdot(-7) = -7n + 15$

3. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다) 에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

-4, (가), 10, (나), (다)

① 1, 12, 14 ② 3, 17, 24 ③ 3, 17, 20
④ 7, 17, 24 ⑤ 7, 13, 16

해설

-4 와 10 의 등차중항은 $\frac{-4+10}{2}=3$, 이 수열의 공차는 7 이다.
따라서 (가), (나), (다) 에 들어갈 수는 3, 17, 24 이다.

4. 세 수 -17, x, 1이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x는 -17과 1의 등차중항이므로

$2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore\ x = -8$

5. 첫째항이 −4, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설

$S_{17} = \dfrac{17\{2\cdot(-4)+(17-1)\cdot 3\}}{2} = \dfrac{680}{2} = 340$

6. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$2,\ 4,\ 8,\ 16, \cdots\cdots$

① $(-2)^n$ ② 2^{n-1} ③ 2^{n+1}
④ 2^n ⑤ $(-2)^{n-1}$

해설
주어진 수열은 첫째항이 2이고 공비가 2이므로 $a_n = 2^n$

7. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4, \sum_{i=1}^{100} y_i = 6$일때, $\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k) = 3\sum_{k=1}^{100} x_k - 2\sum_{k=1}^{100} y_k$
$= 3\sum_{i=1}^{100} x_i - 2\sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$

8. $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-5}} \times \left(-a^{\frac{2}{3}}\right)^4$ 을 간단히 하면? (단, $a > o$)

① a　② $a^{\frac{4}{3}}$　③ a^2　④ a^4　⑤ a^5

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-5}} \times \left(-a^{\frac{2}{3}}\right)^4 &= a^{\frac{2}{3}} \div a^{-\frac{3}{5}} \times a^{\frac{8}{3}} \\ &= a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{8}{3}} \\ &= a^5\end{aligned}$$

9. $12^3 \times 2^{-4} \div 3^2$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

$$(2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} = 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2}$$
$$= 2^2 \times 3 = 12$$

10. $\log_8 0.25 = x$를 만족하는 x의 값은?

① 1　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $-\frac{2}{3}$　　④ $-\frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

$\log_8 0.25 = x$에서 $8^x = 0.25$

$(2^3)^x = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $2^{3x} = 2^{-2}$

$\therefore$ $3x = -2$

$\therefore$ $x = -\frac{2}{3}$

11. $\log_4(x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x>4$ ② $x<4$ ③ $x<6$ ④ $x>8$ ⑤ $x\geq 8$

해설

$x-8>0$ 로부터 $x>8$

12. $1 + \log_9 12 - \log_9 4$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\log_9 12 - \log_9 4 &= 1 + \log_9 9 + \log_9 12 - \log_9 4 \\ &= \log_9(9 \times 12 \div 4) \\ &= \log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

13. $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$ 이고 $\log_{a^3 b} ab^3 = 9$ 일 때, $\log_a b$ 의 값은?

① $\dfrac{13}{3}$ ② $\dfrac{14}{3}$ ③ -3 ④ 3 ⑤ 5

해설

$\log_{a^3 b} ab^3 = \dfrac{\log ab^3}{\log a^3 b} = \dfrac{\log a + 3\log b}{3\log a + \log b} = 9$ 에서

$\log a + 3\log b = 27\log a + 9\log b$

$-26\log a = 6\log b$

$-\dfrac{26}{6} = \dfrac{\log b}{\log a}$

$\therefore\ \log_a b = -\dfrac{13}{3}$

14. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$ 의 값은?

① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$\log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12}$

$= \frac{5}{12}$

15. $\log_{10} 2 = a,\ \log_{10} 3 = b$일 때, $\log_{10} 12$를 $a,\ b$로 나타내면?

① $2ab$ ② $a^2 b$ ③ $2a+b$
④ a^2+b ⑤ $a+2b$

해설

$\log_{10} 12 = \log_{10}(3 \times 2^2)$
$= \log_{10} 3 + \log_{10} 2^2$
$= \log_{10} 3 + 2\log_{10} 2$
$= b + 2a$

16. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$일 때, a_{15}의 값은?

① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

해설

첫째항을 a라 하면 $a_n = a + (n-1) \cdot 3$이므로
$a_4 = a + 9,\ a_9 = a + 24$
이때, $(a+9) : (a+24) = 2 : 5$에서
$5(a+9) = 2(a+24)$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ a_{15} = 1 + (15-1) \cdot 3 = 43$

17. 등차수열 $11,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{100},\ 213$에서 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$b_1 = 2,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,\ b_{101} = a_{100},$
$b_{102} = 213$
$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$
$101d = 202$
$d = 2$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$$\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} = \frac{24(2a+23d)}{2} = 12 \times 36 = 432$$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$
\begin{aligned}
a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\
&= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\
&= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\
&= 199 - 3 \\
&= 196
\end{aligned}
$$

20. 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b,\cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

첫째항$=1$, 공비$=a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \frac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

21. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$S = \dfrac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \dfrac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$

$\therefore\ S = \dfrac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \dfrac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$

22. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

23. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26　　② 27　　③ 28　　④ 29　　⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

24. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\dfrac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\dfrac{j^2+7j}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}(385+385)=385$

25. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{n}{n+1}$　③ $\dfrac{2n}{n+1}$
④ $\dfrac{2n}{2n+1}$　⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

26. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$ ㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢   ② ㉠, ㉡   ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢   ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

㉡$(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

27. $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$을 간단히 하면?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$$\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \sqrt{\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \frac{\sqrt{5-3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8}$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}}$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4}$$
$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$
$$= 2$$

28. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$ 이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

29. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$ 일 때, $\dfrac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$a=\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$

$=\dfrac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{7}$

$\therefore \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{7}$

30. $\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{7}+\log_3\sqrt{7}=a$, $\log_3 4\cdot\log_4\sqrt{3}=b$ 일 때, $a+2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a=\log_3\frac{3}{\sqrt{7}}+\log_3\sqrt{7}=\log_3 3=1$

$b=\log_3 4\cdot\log_4 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=1+1=2$

31. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
$= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

32. $\log 4.02 = 0.6042$ 일 때, $\log 4020^{10}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36, 0.042

해설

$\log 4020^{10} = 10 \log 4020$
$= 10 \log(4.02 \times 1000)$
$= 10(\log 4.02 + \log 1000)$
$= 10(0.6042 + 3)$
$= 10 \times 3.6042 = 36.042$

33. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$이다. 수열 $\{b_n\}$에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항 ② 제6항 ③ 제7항
④ 제8항 ⑤ 제9항

해설

$a_n = 2n$이므로 $b_n = 2^{2n}$
$4^n > 2000$에서 $2n \log 2 > \log 2000$
$\therefore\ n > \dfrac{3.3010}{0.6020} = 5.48\times\times\times$
따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

34. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$

$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$

$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$

35. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots,$에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 $1,\ 2$

3군은 $1,\ 2,\ 3$이므로

7군은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

(6까지의 항의 총수)$= 1+2+\cdots+6 = 21$

$21+7 = 28$(번째 항)

36. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{9}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군 제2군 제3군

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$

제 n군까지의 항수는

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

따라서, 제 4군까지 항수는 15개이므로 구하는 제 20항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n군의 제 m항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5}=\frac{9}{32}$

37. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 10 항은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$a_{n+1} - a_n = 2$의 양변에
$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변끼리
더하면

$$
\begin{array}{l}
a_2 - a_1 = 2 \\
a_3 - a_2 = 2 \\
a_4 - a_3 = 2 \\
\quad \vdots \\
\underline{+)\,a_n - a_{n-1} = 2} \\
a_n - a_1 = 2(n-1)
\end{array}
$$

$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$
$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차
수열이므로 $a_n = 2n + 1$
$\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

38. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로
$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① 1, $\frac{1}{2}$ ② 1, 2 ③ 2, $\frac{1}{2}$ ④ 2, 2 ⑤ 3, $\frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

39. 두 수열 a_n, b_n에 대하여 $b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이 성립한다. $b_n = 3^{n(n+1)}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{33}$ ② $\dfrac{25}{99}$ ③ $\dfrac{15}{101}$ ④ $\dfrac{25}{101}$ ⑤ $\dfrac{35}{101}$

해설

$b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이므로

$a_n = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{3^{n(n+1)}}{3^{(n-1)n}} = 3^{2n}$

$\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 3^{2k} \cdot \log_3 3^{2k+2}}$

$= \sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{2k \cdot 2(k+1)}$

$= \dfrac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{k(k+1)}$

$= \dfrac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$

$= \dfrac{1}{4} \left(1 - \dfrac{1}{101} \right)$

40. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = \dfrac{1}{63}$을 만족하는 n의 값은?

① 9　　② 8　　③ 7　　④ 6　　⑤ 5

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$에서 양변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{a_n} + 1$

이때, $\dfrac{1}{a_n} = b_n$이라 하면 $b_1 = 1,\ b_{n+1} = 2b_n + 1$

그러면, $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$이므로

$b_n + 1 = (b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore\ b_n = 2^n - 1$

따라서 $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$이므로 $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1} = \dfrac{1}{63}$에서 $n = 6$이다.

41. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
$7^n - 4^n$은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$일 때 증명한 것이다.
∴ ①

42. 실수 x, y에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$57^x = 27 = 3^3$에서 $57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \cdots$ ㉠

$513^y = 81 = 3^4$에서 $513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \cdots$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면

$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$

43. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$ 이므로

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.123} &= \frac{1}{3}\log 0.123 = \frac{1}{3}\log 1.23 \times 10^{-1}\\ &= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)\\ &= -0.3034 = -1 + 0.6966\end{aligned}$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분은 0.6966 이다.

44. 12 나 18 로 나누어떨어지지 않는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 439200

해설

구하는 총합을 S 라 하고, 세 자리의 자연수 중에서 12 로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{12}, 18 로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{18}, 36 으로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{36} 이라고 하면

$S =$ (세 자리의 자연수의 총합)

$\quad - (S_{12} + S_{18} - S_{36})$ 이다.

이때, 세 자리의 자연수의 총합은

$100 + 101 + \cdots + 999 = \dfrac{900(100+999)}{2} = 494550$ 이고

$S_{12} = 12 \cdot 9 + 12 \cdot 10 + \cdots + 12 \cdot 83$

$= \dfrac{75(108+996)}{2} = 41400$

$S_{18} = 18 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + \cdots + 18 \cdot 55$

$= \dfrac{50(108+990)}{2} = 27450$

$S_{36} = 36 \cdot 3 + 36 \cdot 4 + \cdots + 36 \cdot 27$

$= \dfrac{25(108+972)}{2} = 13500$

이므로 구하는 총합 S 는

$494550 - (41400 + 27450 - 13500) = 439200$

45. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

46. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$의 정수 부분을 $f(n)$이라 하자. 예를 들면, $f(5)=2$이다. 이때, $\sum_{n=1}^{120} \frac{1}{2f(n)+1}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 20 ④ 24 ⑤ 36

해설

$f(1)=1,\ f(2)=f(3)=1,$
$f(4)=f(2^2)=2,\ f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=2,$
$f(9)=f(3^2)=3,\ f(10)=f(11)=\cdots=f(15)=3,$

$\vdots$

$f(120)=10,\ f(121)=f(11^2)=11$이므로

$\sum_{n=1}^{120} \frac{1}{2f(n)+1} = \frac{1}{2\cdot1+1}+\frac{1}{2\cdot1+1}+\frac{1}{2\cdot1+1}+\frac{1}{2\cdot2+1}+$
$\cdots+\frac{1}{2\cdot10+1}$
$=\frac{1}{3}\cdot3+\frac{1}{5}\cdot5+\frac{1}{7}\cdot7+\cdots+\frac{1}{21}\cdot21$
$=1+1+1+1+\cdots+1=1\cdot10=10$

47. 수열 $3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ 65,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $20^{20}+19$ ② $20^{20}+39$ ③ $20^{21}+11$

④ $20^{21}+18$ ⑤ $20^{21}+29$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ \ 65,\ \ \cdots$

$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \cdots \to b_n = 2^n$

$\therefore a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 3 + \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n + 1$

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{20} (2^k+1) = \dfrac{2(2^{20}-1)}{2-1} + 20$

$= 2^{21} + 18$

48. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의 될 때, a_9의 값은?

① 2^{15}　　② 2^{16}　　③ $3 \cdot 2^{15}$

④ $3 \cdot 2^{16}$　　⑤ $3 \cdot 2^{17}$

해설

$a_1 = 4$

$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 4$

$a_3 = 3 \cdot (a_1 + a_2) = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$

$a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4^3$

$\vdots$

$a_9 = 3 \cdot 4^8 = 3 \cdot 2^{16}$

49. $\log_2 7$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $3^a + 2^b$의 값은?(단, $0 \le b < 1$)

① $\frac{41}{4}$ ② $\frac{43}{4}$ ③ $\frac{45}{4}$ ④ $\frac{47}{4}$ ⑤ $\frac{49}{4}$

해설

밑이 1보다 크면 진수가 클수록 로그 값도 크므로

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$\therefore\ 2 < \log_2 7 < 3$

따라서, $\log_2 7$의 정수부분 $a = 2$,

정수 부분이 2이므로 소수 부분은

$b = \log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$

$\therefore\ 3^a + 2^b = 3^2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}} = 9 + \frac{7}{4} = \frac{43}{4}$

50. $\log 7.62 = 0.8820, \log 2.955 = 0.4705$일 때, $\sqrt[4]{0.0762}$를 계산하면 $0.abcd$이다. 이때, $a+b+c+d$의 값은? (단, $a,\ b,\ c,$는 0보다 크거나 같고 10보다는 작은 정수이다.)

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\log 7.62 = 0.8820$이므로

$\sqrt[4]{0.0762} = \frac{1}{4}\log 0.00762 = \frac{1}{4}\log\frac{7.62}{1000}$

$= \frac{1}{4}(\log 7.62 - 3) = \frac{1}{4}(0.8820 - 3)$

$= -0.5292 = -1 + (1 - 0.5292)$

$= -1 + 0.4705 = -1 + \log 2.955$

$= \log\frac{1}{10} + \log 2.955$

$= \log 0.2955$

따라서 $\sqrt[4]{0.0762} = 0.2955$

$a+b+c+d$는 $2+9+5+5 = 21$