

1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와

x 축과의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.

$x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$36 - 48 + a = 0$ 에서 $a = 12$

따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

$\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$

2. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
 $x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$
 $m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$
 $\therefore m < 1, m > 5$

3. 함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 4$ 에 접할 때, 양수 k 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$ 가 $y = -x + 4$ 에 접하려면
 $4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ 의 판별식은 $D = 0$ 이어야 한다.
 $D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k+1 = \pm 4$
 $\therefore k = 3$ ($\because k > 0$)

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3

② 7

③ 11

④ -3

⑤ -5

해설

$$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$$

$$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$$

$$\therefore f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$$

$$\text{따라서 } a + b + c = 3$$

5. 함수 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$ 이므로

분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore x = 1$ 일 때 최댓값 $\frac{6}{3} = 2$

6. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는

아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

7. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x - 2)^2 + k + 4$ 이므로

$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.

따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $y = -(x - 2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

8. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3

② -2

③ 0

④ 6

⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값 : $(-2 - 1)^2 - 3 = 6$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는 x 축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는 x 축과 만나므로
 $x^2 + 2kx + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,
 $\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0, (k+1)(k-1) \geq 0$
 $\therefore k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots \textcircled{1}$
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않으므로
 $-x^2 + kx + 2k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 할 때,
 $D_2 = k^2 + 8k < 0, k(k+8) < 0$
 $\therefore -8 < k < 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k 는 $-7, -6, \dots, -2, -1$ 의 7개이다.

10. 직선 $y = x + 4$ 에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$ 에 접하는 직선의 방정식은?

- ① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$
④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$ 에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$ 라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,

즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D = 1 - 4k + 8 = 0$$

$$\therefore k = \frac{9}{4}$$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$

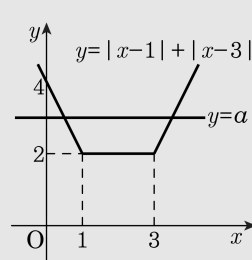
$$\therefore -4x + 4y = 9$$

11. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $a < 2$ ④ $a > 2$ ⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$$

이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.

$$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$$

따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.

13. $x-1=1-y=\frac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x,y,z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x-1=1-y=\frac{z-3}{2}=k \text{ 라 하면}$$

$$x=k+1, y=1-k, z=2k+3$$

그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2 + (1-k)^2 + (2k+3)^2 \\ &= 6k^2 + 12k + 11 \\ &= 6(k+1)^2 + 5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

14. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$$

... ㉠

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$$t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

15. 실수 x, y 가 $2x + y = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

- ① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$$2x + y = 4 \text{ 에서 } y = -2x + 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{에서 } x^2 + y^2 &= x^2 + (-2x + 4)^2 \\ &= 5x^2 - 16x + 16 \\ &= 5\left(x^2 - \frac{16}{5}x\right) + 16 \\ &= 5\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}\end{aligned}$$

따라서 $x^2 + y^2$ 은 $x = \frac{8}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$ 을 갖는다.

16. x, y 가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7 \\ &= (x - 3)^2 + 2(y + 1)^2 - 4 \text{ 이므로} \\ & x = 3, y = -1 \text{ 일 때, 최솟값 } -4 \text{ 를 갖는다.} \end{aligned}$$

17. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$
 $= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$
이 때, x, y, z 가 실수이므로
 $(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1 이다.

18. $y = 0$, $y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k - 2 \neq 0$

$\therefore k \neq 2 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{3(k - 1)\}^2 - (k - 2)(9k + 1) > 0$$

$$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$$

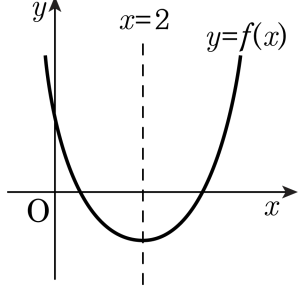
$$-k + 11 > 0$$

$\therefore k < 11 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

①, ②에서 $k < 11$, $k \neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10이다.

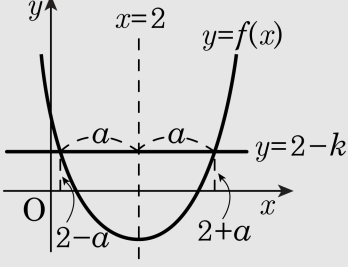
19. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은
 $t = 2 - k$ 또는 $t = 2 + k$
 $(0 < k < 2)$ 로 놓을 수 있다.
 $\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은
 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로
 $x = 2 - a$ 또는 $x = 2 + a$
(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은
 $(2 - a) + (2 + a) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

20. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a - 3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
 $y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$
 $\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12$
 $\quad \quad \quad = 3 \cdot 2 - 12$
 $\quad \quad \quad = -6$

21. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = 3 \text{ } (\because a > 1)$$

22. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$
(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$
 $\therefore x = 0$
(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $D = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0$
 $3y^2 - 10y + 3 \leq 0$
 $(3y - 1)(y - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로
최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

23. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 실수 k 의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k+a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a+4)k \text{ 이고}$$

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$$2a + 4 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

24. $x + 3y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq -2$ 일 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + \frac{1}{m}$ 의 값은?

- ① 53 ② 58 ③ 63 ④ 68 ⑤ 72

해설

$$x + 3y = 1 \text{로부터 } x = 1 - 3y \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로

$$x = 1 - 3y \geq 0 \therefore y \leq \frac{1}{3} \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

$$\text{또 } y \geq -2 \dots\dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B}, \textcircled{C} \text{에서 } -2 \leq y \leq \frac{1}{3}$$

$x^2 + y^2 = k$ 라 하고 이 식에 $\textcircled{A}$ 을 대입하면

$$(1 - 3y)^2 + y^2 = 1 - 6y + 9y^2 + y^2 \therefore 10\left(y^2 - \frac{6}{10}y\right) + 1 = k \\ = 10y^2 - 6y + 1 = k$$

$$\rightarrow 10\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{10} + 1 = k$$

$$\rightarrow 10\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} = k$$

$$\begin{cases} \therefore y = \frac{3}{10} \text{ 일 때 } k = \frac{1}{10} : \text{최솟값 } m \\ y = -2 \text{ 일 때 } k = 53 : \text{최댓값 } M \\ y = \frac{1}{3} \text{ 일 때 } k = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\therefore M + \frac{1}{m} = 53 + 10 = 63$$

25. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 16 인 직각삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 18

② 32

③ 48

④ 64

⑤ 80

해설

직각을 낀 두변의 길이를 각각 x , y 라 하면 $x + y = 16$
이 때, $x > 0$, $y > 0$ 이므로 $y = 16 - x > 0$ 에서 $0 < x < 16$
직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(16 - x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x = -\frac{1}{2}(x - 8)^2 + 32$$

따라서 $0 < x < 16$ 이므로 $x = 8$ 일 때 넓이의 최댓값은 32 이다.