1. 이차함수 $y=x^2-8x+a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a+b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y=x^2-8x+a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 실근이다.
$x^2-8x+a=0$에 $x=6$을 대입하면
$36-48+a=0$에서 $a=12$
따라서 $x^2-8x+12=0$에서 $(x-2)(x-6)=0$
$x=2$ 또는 $x=6$
$\therefore\ b=2 \therefore\ a+b=14$

2. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$　② $m < 1, m > 5$　③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$　⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

3. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면

$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$

이어야 한다.

$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$

$\therefore k=3 \; (\because k>0)$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ -3 ⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$

$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$

$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$

따라서 $a + b + c = 3$

5. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로
분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore\ x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

6. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

7. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14　② -12　③ -10　④ -8　⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

8. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,

$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k의 개수는?

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0, \quad (k+1)(k-1) \geq 0$$

$\therefore\ k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠

또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$$D_2 = k^2 + 8k < 0, \quad k(k+8) < 0$$

$\therefore\ -8 < k < 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k는 $-7, -6, \cdots, -2, -1$의 7개이다.

10. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$　② $4x - 4y = 9$　③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$　⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면

이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,

즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D = 1 - 4k + 8 = 0$

$\therefore k = \dfrac{9}{4}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \dfrac{9}{4}$

$\therefore -4x + 4y = 9$

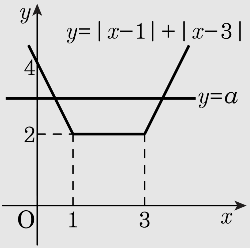
11. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

13. $x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}=k$ 라 하면

$x=k+1,\ y=1-k,\ z=2k+3$

그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2+(1-k)^2+(2k+3)^2 \\ &= 6k^2+12k+11 \\ &= 6(k+1)^2+5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

14. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2-y^2+z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}=t$ 라 하면

$x=2t-1$, $y=5t+3$, $z=3t-2$ 이므로

$x^2-y^2+z^2=(2t-1)^2-(5t+3)^2+(3t-2)^2=-12t^2-46t-4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2-46\cdot\frac{2}{3}-4=-40$

15. 실수 x, y가 $2x+y=4$를 만족할 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x+y=4$ 에서 $y=-2x+4 \cdots$ ㉠

㉠에서
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(-2x+4)^2 \\ &= 5x^2-16x+16 \\ &= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16 \\ &= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5} \end{aligned}$$

따라서 x^2+y^2은 $x=\frac{8}{5}$일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

16. x, y가 실수일 때, $x^2-6x+2y^2+4y+7$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

$x^2-6x+2y^2+4y+7$
$=(x-3)^2+2(y+1)^2-4$이므로
$x=3,\ y=-1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

17. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

18. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$

$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$$

$$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$$

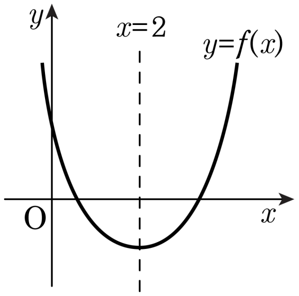
$$-k+11>0$$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$

따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

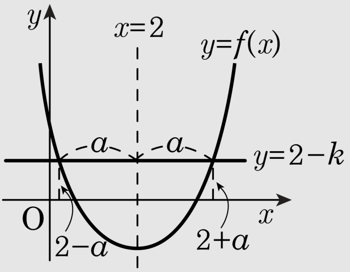
19. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 모든 실근의 합은? (단, $y=f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$f(f(x))=0$에서 $f(x)=t$로 놓으면
$f(t)=0$을 만족시키는 두 실근은
$t=2-k$ 또는 $f=2+k$
$(0<k<2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x)=2-k$ 또는 $f(x)=2+k$



(ⅰ) $f(x)=2-k$를 만족시키는 x의 값은
$y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=2-k$의 교점의 x좌표이므로
$x=2-\alpha$ 또는 $x=2+\alpha$
(ⅱ) $f(x)=2+k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x=2-\beta$ 또는 $x=2+\beta$
따라서 $f(f(x))=0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2-\alpha)+(2+\alpha)+(2-\beta)+(2+\beta)=8$

20. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 의 그래프와 $g(x)=3x-4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1+y_2+y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3-2x^2+ax+b=3x-4$

즉 $x^3-2x^2+(a-3)x+b+4=0$ 의 세 근 $x_1+x_2+x_3=2$

이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y=3x-4$ 위의 점이므로

$y_1=3x_1-4, y_2=3x_2-4, y_3=3x_3-4$

$$\begin{aligned}\therefore y_1+y_2+y_3 &= 3(x_1+x_2+x_3)-12\\ &= 3\cdot 2-12\\ &= -6\end{aligned}$$

21. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$

최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$

최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$

$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 3 \ (\because a > 1)$

22. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$\therefore x = 0$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$

$(3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

23. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k+a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a+4)k$ 이고

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$2a + 4 = 0$

$\therefore a = -2$

24. $x+3y=1,\ x\geq 0,\ y\geq -2$ 일 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+\frac{1}{m}$ 의 값은?

① 53 ② 58 ③ 63 ④ 68 ⑤ 72

해설

$x+3y=1$ 로부터 $x=1-3y \cdots\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $x\geq 0$ 이므로

$x=1-3y\geq 0 \therefore\ y\leq \frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots$ ㉡

또 $y\geq -2 \cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $-2\leq y\leq \frac{1}{3}$

$x^2+y^2=k$ 라 하고 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\begin{aligned}(1-3y)^2+y^2 &= 1-6y+9y^2+y^2 \quad \therefore\ 10\left(y^2-\frac{6}{10}y\right)+1=k \\ &= 10y^2-6y+1=k\end{aligned}$$

$$\rightarrow\ 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{10}+1=k$$

$$\rightarrow\ 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10}=k$$

$$\begin{cases}\therefore\ y=\frac{3}{10} \text{ 일 때 } k=\frac{1}{10} \ :\ \text{최솟값 } m \\ y=-2 \text{ 일 때 } k=53 \ :\ \text{최댓값 } M \\ y=\frac{1}{3} \text{ 일 때 } k=\frac{1}{9}\end{cases}$$

$\therefore\ M+\frac{1}{m}=53+10=63$

25. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 16 인 직각삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 18 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

해설

직각을 낀 두변의 길이를 각각 x, y 라 하면 $x+y=16$
이 때, $x>0$, $y>0$ 이므로 $y=16-x>0$ 에서 $0<x<16$
직각삼각형의 넓이는
$$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x(16-x)=-\frac{1}{2}x^2+8x=-\frac{1}{2}(x-8)^2+32$$
따라서 $0<x<16$ 이므로 $x=8$ 일 때 넓이의 최댓값은 32 이다.