

1. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i \\y^2 &= (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i \\\therefore x^2 + y^2 &= -2\end{aligned}$$

해설

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$$

2. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\&= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\&= 2\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\&= 4^2 - 2 \cdot 7 \\&= 16 - 14 \\&= 2\end{aligned}$$

3. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i$ 에서

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{이므로 연립하면}$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

4. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

- ① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$

②

 $z = 2 \pm \sqrt{3}i$

③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
- ④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$

⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$$z = a + bi$$
$$z + \bar{z} = 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$$
$$\therefore a = 2, b = \pm \sqrt{3}$$
$$\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$$

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

6. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

7. 복소수 $(1+2i)x - (2+i)y + i$ 를 제곱하였더니 -9 가 되었다. 이 때, $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 x, y 는 실수이다.)

- ① 2 또는 -4 ② 2 또는 -3 ③ -1 또는 3
④ -1 또는 -3 ⑤ -1 또는 -2

해설

$z = (x-2y) + (2x-y+1)i$
 $z^2 = -9$
즉, z 는 순허수이다.
 $\therefore x-2y=0, (2x-y+1)^2=9$
 $x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm 3$ 을 연립하여 풀면
 $y=\frac{2}{3} \rightarrow x=\frac{4}{3}$
 $y=-\frac{4}{3} \rightarrow x=-\frac{8}{3}$
 $\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

8. $z = (1+i)x^2 + (2-i)x - 8 - 2i$ 에 대하여 $z^2 < 0$ 을 만족하는 실수 x 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 2x - 8) + (x^2 - x - 2)i \\ &= (x-2)(x+4) + (x+1)(x-2)i \end{aligned}$$

그런데, $z^2 < 0$ 에서 z 는 순허수이므로
 $\therefore x = -4$

9. $\sqrt{(y-x)^2} + (y-1)i = -2x - 3i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$$\begin{aligned} |y-x| + (y-1)i &= -2x - 3i \\ |y-x| &= -2x \\ y-1 &= -3 \quad \therefore y = -2 \\ \text{(i) } y \geq x \text{ 일 때} \\ y-x &= -2x, y = -x, x = 2 \text{ (모순)} \\ \text{(ii) } y < x \text{ 일 때} \\ x-y &= -2x, y = 3x \\ \therefore x &= -\frac{2}{3} \text{ (정답)} \\ \therefore \frac{x}{y} &= \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 최댓값은?

① -4

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$$

$$x = 1 \text{ 또는 } 2 \quad y = \pm 2$$

$$\therefore (xy \text{의 최댓값}) = 4$$

11. $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \\ &= \{1 + (-i) + (-1) + i\} + \{1 + (-i) + (-1) + i\} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

12. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$f(i) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30} = (-i)^{30} = (i^4)^7 i^2$$

$$= -1f(-i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30} = i^{30}$$

$$= (i^4)^7 i^2 = -1$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= f(i) + f(-i) = -1 - 1 = -2$$

13. $f(x) = \frac{x}{1+i}$, $g(x) = \frac{x}{1-i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1-i)\}^{100} + \{g(1+i)\}^{100}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$f(1-i) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

$$g(1+i) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \{f(1-i)\}^{100} + \{g(1+i)\}^{100} \\ &= (-i)^{100} + (i)^{100} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

14. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

15. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2006}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

- ㉠ -1 ㉡ 1 ㉢ $-i$ ㉣ i ㉤ 2002

해설

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} \text{ 을 유리화 하면 } \frac{1+i}{1-i} &= i \\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2006} &= i^{2006} = (i^4)^{501} i^2 = -1 \end{aligned}$$

16. 다음 계산을 하시오.

$$1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$$\begin{aligned} i^4 &= 1 \text{ 이므로} \\ \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i} \\ &= \frac{1^5}{i} + \frac{1^6}{i} + \frac{1^7}{i} + \frac{1^8}{i} \cdots \\ &= \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i} \\ &= -i - 1 + i + 1 = 0 \\ \therefore (\text{준식}) &= 1 + (0 + 0 + \cdots + 0) + \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} \\ &= 1 - i - 1 = -i \end{aligned}$$