

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은?

① 5

② 8

③ 11

④ 13

⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4 는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d 라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore d = 3$

$\therefore a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

2. 조화수열 12, 6, 4, 3, ...의 일반항은?

- ① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n}$$

3. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36항까지의 합을 구하여라.

$(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{ (\omega^2)^{36} - 1 \}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

4. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b$, a , $a+b$ 라 하면 세 수의 합이 12이므로

$$(a-b) + a + (a+b) = 12, 3a = 12$$

$$\therefore a = 4$$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 28, 16-d^2 = 7$$

$$d^2 = 9 \therefore d = \pm 3$$

따라서 구하는 세 수는 1, 4, 7이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

5. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1, a_5 = b_7, b_{22} = 10$ 일 때, $a_k = 10$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

- ① 12 ② 14 ③ 15 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$ 의 공차를 $x, \{b_n\}$ 의 공차를 y 라 하면
 $a_n = a_1 + (n-1)x$
 $b_n = b_1 + (n-1)y$
 $a_1 + 4x = b_1 + 6y$
 $\therefore y = \frac{2}{3}x$
 $b_{22} = b_1 + 21y = 10$
 $a_k = a_1 + (k-1)x = 10$
 $a_1 = b_1$ 이므로 $a_1 = 10 - 21y$
 $10 - 21y + (k-1)x = 10$
 $y = \frac{2}{3}x$ 이므로
 $10 - 14x + (k-1)x = 10$
 $-14x + (k-1)x = 0$
 $(k-15)x = 0$
(i) $x \neq 0$ 일 때, $k = 15$
(ii) $x = 0$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $b_{22} = \cdots = b_1 = 10$
 $b_1 = a_1$ 이므로 $a_1 = 10$
그런데 $a_1 \neq 10$ 이 아니므로
 $x = 0$ 이 될 수 없다.
 $\therefore k = 15$

6. 첫째항부터 제4항까지의 합이 38, 첫째항부터 제10항까지의 합이 185인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

① 660 ② 670 ③ 680 ④ 690 ⑤ 600

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4 = \frac{4(2a + 3d)}{2} = 38$$

$$\therefore 2a + 3d = 19 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 185$$

$$\therefore 2a + 9d = 37 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 5$, $d = 3$

$$\therefore S_{20} = \frac{20 \{ 2 \times 5 + (20 - 1) \times 3 \}}{2} = 670$$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 20이고, 공차는 d 인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$ 을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $S_n > 0$ 을 만족하는 n 의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$\{a_n\}$ 이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로

$$a_7 \cdot a_8 < 0 \text{에서 } a_7 > 0, a_8 < 0$$

$$a_7 = 20 + 6d > 0, a_8 = 20 + 7d < 0$$

이때 공차 d 는 정수이므로 $d = -3$

$S_n > 0$ 을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$$n(43 - 3n) > 0, n(3n - 43) < 0$$

$$\therefore 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

8. 첫째 날에 100 원, 둘째 날에 110 원, 셋째 날에 120 원 ... 과 같이 매일 10 원씩 늘려 30 일간 저금통에 넣으면 적립한 총액은?

① 6450 ② 7350 ③ 7450 ④ 8250 ⑤ 8450

해설

$$a = 100, d = 10$$

$$S_{30} = \frac{30 \{2 \times 100 + (30 - 1) \cdot 10\}}{2} = 7350$$

9. 등비수열 $\sqrt{2}+1, 1, \sqrt{2}-1, 3-2\sqrt{2}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

- ① $(\sqrt{2}-1)^{98}$ ② $(\sqrt{2}-1)^{99}$ ③ $(\sqrt{2}-1)^{100}$
④ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{90}$ ⑤ $2(\sqrt{2}-1)^{90}$

해설

$$\text{공비를 } r \text{이라 하면 } r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\therefore a_n = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{100} &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99} \\ &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98} \\ &= (\sqrt{2}-1)^{98}\end{aligned}$$

10. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근의 등차중항을 A , 등비중항을 G 라 할 때, A^2, G^2 을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 $a + b$ 의 값은?

① 12 ② 15 ③ 24 ④ 27 ⑤ 39

해설

$x^2 - 6x + 3 = 0$ 에서 두 근을 α, β 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore A = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3, G = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{3}$$

이 때, A^2, G^2 즉, 9와 3을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x - 9)(x - 3) = 0 \quad \therefore x^2 - 12x + 27 = 0$$

따라서 $a = -12, b = 27$

11. 부피가 8이고 겹넓이가 28인 직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a , ar , ar^2 이라 하면

$$(\text{부피}) = a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$$

$$\therefore ar = 2 \cdots \text{㉠}$$

$$(\text{겹넓이}) = 2(a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)$$

$$= 2\{a \cdot ar + (ar)^2 \cdot r + (ar)^2\}$$

$$= 2(2a + 4r + 2^2)$$

$$= 4a + 8r + 8 = 28$$

$$\therefore a + 2r = 5 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = 1, r = 2 \text{ 또는 } a = 4, r = \frac{1}{2}$$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 (1, 2, 4) 또는 (4, 2, 1)이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

12. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n - 1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{3n-1}$$

$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

13. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n} = 7$ 일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1 이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} = 7, \frac{r^{3n}-1}{r^n-1} = 7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1} = 7, r^{2n}+r^n+1 = 7$$

$$(r^n)^2+r^n-6 = 0, (r^n+3)(r^n-2) = 0$$

$$\therefore r^n = 2 (\because r > 1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} = \frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1} = r^n+1 = 3$$

14. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 $1000\text{만} \times (1.04)^1$
(10년후 원리합계)
 $= 1000\text{만} \times 1.04^{10}$
 $= 1000\text{만} \times 1.48$
 $= 1480\text{만 (원)}$

15. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\log_2(S_n + k) = n - 1$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되도록 하는 상수 k 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\log_2(S_n + k) = n - 1 \text{ 에서 } S_n + k = 2^{n-1}$$

$$\therefore S_n = 2^{n-1} - k$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 1 - k$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2^{n-1} - k) - (2^{n-2} - k)$$

$$= 2^{n-1} - 2^{n-2}$$

$$= (2 - 1)2^{n-2} = 2^{n-2}$$

이 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면 $S_1 = a_1$ 을 만족

$$\text{해야 하므로 } 1 - k = 2^{-1} \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

16. $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) = 62$ 를 만족하는 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \{ \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) - (n^2 - 1) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \{ (k^2 + 1) - (k^2 - 1) \} + (n^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n 2 + (n^2 - 1) = n^2 + 2n - 1 = 62 \\ & \text{이것을 정리하여 인수분해하면 } (n + 9)(n - 7) = 0 \\ & \text{따라서 } n = -9 \text{ 또는 } n = 7 \\ & \text{그런데 } n > 0 \text{ 이므로 } n = 7 \end{aligned}$$

17. 다음을 계산하여라.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

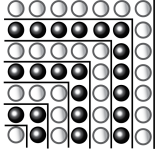
▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 1155 - 110 \\ &= 1045 \end{aligned}$$

18. 오른쪽 그림을 이용하여 수열의 합을 설명할 수 있는 것은?



- ① $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- ② $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- ③ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)^2}{2} \right\}$
- ④ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- ⑤ $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

해설

그림의 왼쪽 아래부터 생각해보면
흰돌의 수 = 1
검은돌의 수 = 3
흰돌의 수 = 5
즉 1, 3, 5, ... 이런 식으로
돌의 개수가 증가함을 알 수 있다.
그런데 그림에 놓인 돌의 개수는
가로와 세로가 같으므로
 $n \times n = n^2$ 임을 알 수 있다.
 $\therefore 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

19. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$$

(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 5$

$$(i), (ii) \text{에서} \begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

$$\therefore a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$$

$$= 5 + \frac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$$

$$2n^2 + 2n + 1 = 221 \text{에서 } n = 10 \text{ 또는 } n = -11$$

그런데 $n \geq 1$ 이므로 $n = 10$

20. 수열 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \sqrt{5-2\sqrt{6}}, \sqrt{7-2\sqrt{2}}, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 10 일 때, n 의 값은?

- ① 116
- ② 117
- ③ 118
- ④ 119
- ⑤ 120

해설

$$a_1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$
$$a_2 = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$a_3 = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$
$$\text{따라서 } a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$$S_n = \sqrt{n+1}-1$$
$$\sqrt{n+1}-1 = 10$$
$$\sqrt{n+1} = 11$$
$$n+1 = 121$$
$$n = 120$$

21. $\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \cdots + \frac{1}{21^2-1}$ 의 값은?
- ① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{3}{22}$ ③ $\frac{5}{22}$ ④ $\frac{7}{22}$ ⑤ $\frac{9}{22}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{(2n+1-1)(2n+1+1)} \\ &= \frac{1}{2n \cdot (2n+2)} \\ &= \frac{1}{4n(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n+1-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ \sum_{k=1}^{10} a_k &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{10}{44} = \frac{5}{22} \end{aligned}$$

22. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$ 의 두근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= -4 \\ \alpha_n \beta_n &= -(2n-1)(2n+1) \\ \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)} \\ \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\beta_k} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\alpha_k + \beta_k}{\alpha_k \beta_k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{4}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

23. 다음 수열의 합은? (단, $x \neq 1$)

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1}$$

- ① $S = \frac{(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{(2n-1)x^n}{1-x}$
- ② $S = \frac{(1-x)^2}{(1+x^n)} - \frac{1-(2n-1)x^n}{1-x}$
- ③ $S = \frac{(1-x^n)}{(2-x)^2} - \frac{1+(2n-1)x^n}{2-x}$
- ④ $S = \frac{2(2-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{(2n-2)x^n}{1-x}$
- ⑤ $S = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$

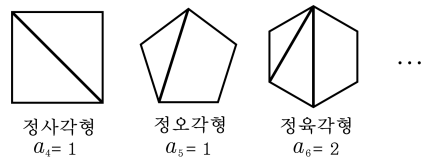
해설

$$S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1} \cdots \textcircled{A}$$
$$xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \cdots \textcircled{B}$$

이므로 $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$(1-x)S = 2(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) - 1 - (2n-1)x^n$$
$$(1-x)S = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^n-1)}{x-1} - 1 - (2n-1)x^n$$
$$S = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$$

24. 그림과 같이 정 n 각형 ($n \geq 4$)의 서로 다른 대각선의 길이의 개수를 a_n 이라 하자.

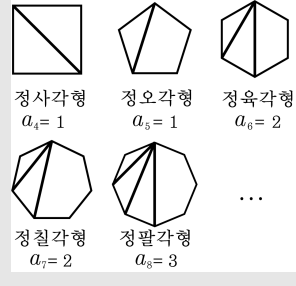


예를 들면 $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$ 이다. 이때, $\sum_{k=4}^{17} a_n$ 의 값은?

▶ 답:

▶ 정답 : 64

해설



$$\therefore a_n = \left[\frac{n}{2} \right] - 1$$

$$\sum_{k=4}^{17} a_n = (1+1) + (2+2) + \cdots + (6+6) + (7+7)$$

$$= 2 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 64$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,
 $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = S_n S_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이 성립한다. 보기 중 옳은
 것을 모두 고르면? (단, $S_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$)

보기

- ㉠ 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 은 등차수열이다.
- ㉡ $n \geq 4$ 이면 $a_n > 0$ 이다.
- ㉢ $n \geq 4$ 일 때,
 $a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_n = \frac{2n-6}{2n-5}$ 이다.

- ① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n (n \geq 1)$ 이므로
 $S_{n+1} - S_n = S_n S_{n+1}$
 양변을 $S_n S_{n+1}$ 로 나누면
 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1$ 즉, $\frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = -1$ 이므로
 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 은 공차가 -1 인 등차수열이다. (참)
 ㉡ $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{1}{S_n} = \frac{3}{2} + (n-1)(-1) = \frac{5-2n}{2}$
 $\therefore S_n = \frac{2}{5-2n}$
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{5-2n} - \frac{2}{7-2n} = \frac{4}{(2n-5)(2n-7)}$
 $n \geq 4$ 일 때, $(2n-5)(2n-7) > 0$ 이므로 $a_n > 0$ (참)
 ㉢ $a_4 + a_5 + \cdots + a_n = \sum_{k=4}^n \frac{4}{(2k-5)(2k-7)}$
 $= 2 \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{2k-7} - \frac{1}{2k-5} \right)$
 $= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{2n-7} - \frac{1}{2n-5} \right) \right\}$
 $= 2 \left(1 - \frac{1}{2n-5} \right) = \frac{4n-12}{2n-5}$ (거짓)
 따라서, 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

26. 1이 아닌 서로 다른 두 수 a, b 에 대하여 다음과 같이 양수로 이루어진 수열이 있다.
 $a, b, a^2, ab, b^2, a^3, a^2b, ab^2, b^3, \dots$
 이 수열의 첫째항 a 부터 $a^m b^n$ 까지의 합을 $S(m, n)$ 이라 할 때, 보기 중 옳은 것만을 고른 것은?

보기

- ㉠ $a^{10}b^7$ 은 이 수열의 제160항이다.
 ㉡ 첫째항부터 제100항까지 모든 항의 곱은 $a^{554}b^{510}$ 이다.
 ㉢ $S(n, n+4) - S(n+4, n) = a^n b^n \times \frac{a^4 - b^4}{a - b}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 수열을
 $(a, b), (a^2, ab, b^2), (a^3, a^2b, ab^2, b^3), \dots$
 으로 묶으면 각 군에 속한 식의 차수가 모두 같으므로 제 n 군에 속한

식의 차수는 모두 n 이고, 항의 개수는 $n+1$ 이다.

- ㉠ $a^{10}b^7$ 은 차수가 17로 제17군의 8번째 수이다. $\therefore (2+3+4+\dots+17)+8 = \left(\frac{16 \cdot 19}{2} - 1\right) + 8 = 160$ 즉, 제160항이다.

(참)

- ㉡ $\frac{14 \cdot 15}{2} - 1 = 104$ 이므로 제100항은 제13군의 끝에서 5번째 항이다. 제1군부터 제13군까지 모든 항을 곱하면 a 의 차수와 b 의 차수가 같고, a 의 차수는 $1 + (2+1) + (3+2+1) + \dots + (13+12+\dots+1) = \sum_{k=1}^{13} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + \frac{13 \cdot 14}{2} \right) = 455$

따라서 첫째항부터 제100항까지의 곱은 제13군의 끝에서 4, 3, 2, 1번째항 $a^3b^{10}, a^2b^{11}, ab^{12}, b^{13}$ 의 곱을 제외하면 $a^{455-(3+2+1+0)}b^{455-(13+12+11+10)} = a^{449}b^{409}$ (거짓)

- ㉢ $S(n, n+4) - S(n+4, n)$
 $= a^{n+3}b^{n+2} + a^{n+2}b^{n+2} + a^{n+1}b^{n+3} + a^n b^{n+4}$
 $= a^n b^{n+1}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
 $= a^n b^{n+1} \times \frac{a^3 \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^4 \right\}}{1 - \frac{b}{a}}$
 $= a^n b^{n+1} \times \frac{a^4 - b^4}{a - b}$ (거짓)