

1. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$ 을 $\sqrt{2^k}$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$$

$$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k \text{ 이므로 } \frac{5}{12} = \frac{1}{2}k$$

$$\therefore k = \frac{5}{6}$$

2. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7}{a^{-3} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6} + a^{-7} + a^{-8} + a^{-9}}$$

- ① a^8 ② a^9 ③ a^{10} ④ a^{11} ⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10} 을 곱하면

$$\frac{a^{10} \times (a + a^2 + \cdots + a^7)}{a^7 + a^6 + \cdots + a^2 + a} = a^{10}$$

3. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

$\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2^{\frac{7}{8}}$

$\textcircled{\text{㉡}} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2$

$\textcircled{\text{㉢}} (3^{\sqrt{2}})\times(3^{\sqrt{2}})=9$

- ①

㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}} \\ &\therefore \text{참}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \quad \therefore \text{거짓}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} (3^{\sqrt{2}})\times(3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}} \quad \therefore \text{거짓}$$

4. $a = \frac{4}{\sqrt{2}}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$ 를 a, b 로 나타낸 것은?

- ① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2}\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

5. 다음 명제 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ① -1 의 세제곱근 중 허수는 한 개뿐이다.
- ② $-\sqrt{3}$ 의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{3}$ 이다.
- ③ $\sqrt{2}$ 의 네제곱근 중 실수는 $-\sqrt[4]{2}$ 와 $\sqrt[4]{2}$ 뿐이다.
- ④ -10 의 n 제곱근(n 은 홀수) 중 실수인 것은 한 개뿐이다.
- ⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = -\sqrt[3]{3}$

해설

- ① -1 의 세제곱근 중 실수 1개와 허수2개가 있다. (거짓)
- ② $-\sqrt{3}$ 의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ 이다. (거짓)
- ③ n 이 홀수일 때, -10 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-10}$, 즉 한개이다. (참)
- ⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = \{(\sqrt[3]{-3})^3\}^3 = (-3)^3 = -27$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

6. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$ 를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \times 2}} \\ &= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt[12]{2^{24} \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{12}}\end{aligned}$$

따라서 $p = 12, q = 29$ 이므로 $p + q = 41$

7. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt{a}$ ② $\sqrt[3]{a}$ ③ $\sqrt[3]{a^2}$ ④ $\sqrt[4]{a}$ ⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} = \frac{{}^{12}\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[6]{a}$$

8. $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} = a^k$ 을 만족시키는 유리 수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{8}$
- ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} \\ &= \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{4}}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}} \\ &= \sqrt[3]{a \cdot \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}} \\ &= \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{5}{12}}} \times \sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \left(a^{\frac{17}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{17}{36} + \frac{1}{36}} = a^{\frac{18}{36}} = a^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

9. 양의 실수 a 에 대하여 $\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[n]{a^n}$ 이 성립할 때, 자연수 n 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \\&= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \\&= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^7}{a}} \\&= \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a} = \sqrt[8]{a^4}\end{aligned}$$

$\therefore n = 4$

10. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ 를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

- ① $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ ② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{34}$ ③ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$
④ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$ ⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$
이므로 세 수를 12제곱하면
 $7^4 = 2401$, $10^3 = 1000$, $34^2 = 1156$
따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면
 $\therefore \sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

11. 세 수 $A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $A > B > C$ ② $B > A > C$ ③ $C > B > A$
④ $A > C > B$ ⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

$$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$$

$$\therefore A > B > C$$

12. 세 수 $\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ 중 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $2^{\frac{1}{12}}$

② $3^{\frac{1}{6}}$

③ $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

④ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$

⑤ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

해설

$$\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}} = 3^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{6}}2^{\frac{1}{6}} = (3^4 \times 2)^{\frac{1}{6}} = 162^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{6}}(3^3)^{\frac{1}{6}} = 108^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{3^4 \times 2}{2^3 \times 3^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

13. 세 수 A, B, C 를
 $A = (10\sqrt{5}$ 의 6제곱근 중 양의 실수)
 $B = (\sqrt{24}$ 의 세제곱근 중 실수),
 $C = (64$ 의 8제곱근 중 양의 실수)
로 정의할 때, 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 차례로 쓰면?

- ① A, B ② A, C ③ B, A ④ B, C ⑤ C, B

해설

$A = \sqrt[6]{\sqrt{500}} = 500^{\frac{1}{12}},$
 $B = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \left\{ (24)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 24^{\frac{1}{6}} = (24^2)^{\frac{1}{12}} = 576^{\frac{1}{12}}$
 $C = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9} = 512^{\frac{1}{12}}$ 이므로
 $A = 500^{\frac{1}{12}}, B = 576^{\frac{1}{12}}, C = 512^{\frac{1}{12}}$
이때, $500 < 512 < 576$ 이므로
 $A < C < B$
따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수는 차례로 B, A 이다.

14. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$ 일 때, $\sqrt[6]{6}$ 을 a, b 로 나타낸 것은?

- ① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, b = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \text{ 이므로}$$
$$\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$$

15. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}} \text{ 이 자연수}$$

$$n = -1 \text{ 일 때, } 3^3$$

$$n = -3 \text{ 일 때, } 3$$

$\Rightarrow$ 2개

16. $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$$(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} - 1$$

$$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + 1 = 4 \text{ 이므로}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3 \\ = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 = (2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = 24 \end{aligned}$$

17. $x - y = 2$, $2^x + 2^{-y} = 5$ 일 때, $8^x + 8^{-y}$ 의 값은?

① 61

② 62

③ 63

④ 64

⑤ 65

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진식}) &= 2^{3x} + 2^{-3y} \\ &= (2^x + 2^{-y})^3 - 3 \cdot 2^x 2^{-y} (2^x + 2^{-y}) \\ &= 5^3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 = 65\end{aligned}$$

18. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^2$

$$a + a^{-1} + 2 = 16$$

$$\therefore a + a^{-1} = 14$$

19. $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$$

$$x - 2 + x^{-1} = 4$$

$$x + x^{-1} = 6$$

$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$$

$$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$$

20. $x + x^{-1} = 3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$

② 3

③ 5

④ $2\sqrt{5}$

⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$$x + x^{-1} = 3 \text{ 이므로}$$

$$(x + x^{-1})^3 = 27$$

$$x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}) = 27$$

$$x^3 + x^{-3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18$$

$$(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})^2 = x^3 + x^{-3} + 2 = 20$$

$$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{5} \quad (\because x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0)$$

21. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, $x^2 + x^{-2}$ 의 값을 구하면?

① 33

② 36

③ 43

④ 47

⑤ 49

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 9$$

$$x + x^{-1} + 2 = 9$$

$$\therefore x + x^{-1} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = 49$$

$$x^2 + x^{-2} + 2 = 49$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 47$$

22. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

23. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{2}{7}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{7}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x} 를 곱하면

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} = \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}}$$

$$= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1}$$

$$= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}$$

24. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$ 일 때, $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7}{6}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2 \text{ 에서 } a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) \text{ 이므로}$$

$$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore a^{2x} = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

25. $p \times 3^x = 1$, $q \times 3^y = 1$ 일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$ 을 p , q 로 바르게 나타낸 것은?

- ① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x > 0$, $3^y > 0$ 이므로 $p > 0$, $q > 0$ 이다.

$$3^x = \frac{1}{p}, \quad 3^y = \frac{1}{q}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$$

$$= (3^x)^{-4} (3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4} \left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4 q^2$$

26. 양수 a, b, c 가 $abc = 9, a^x = b^y = c^z = 81$ 을 만족시킬 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$a = 81^{\frac{1}{x}}, b = 81^{\frac{1}{y}}, c = 81^{\frac{1}{z}}$$

$$abc = 81^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

$$9 = 9^{2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})}$$

$$1 = 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

27. $20^a = 5\sqrt{3}$, $20^b = 2$ 일 때, $10^{\frac{2a}{1-b}}$ 의 값은?

① 25

② 35

③ 55

④ 65

⑤ 75

해설

주어진 조건과 같이 밑이 20이 되도록 구하려는 식을 변형한다.

$$10 = \frac{20}{2} = \frac{20}{20^b} = 20^{1-b}$$

$$\therefore 10^{\frac{2a}{1-b}} = (20^{1-b})^{\frac{2a}{1-b}} = 20^{2a} = (20^a)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

28. $36^a = 8$, $6^b = 4$ 일 때, $2^{\frac{1}{2a-b}}$ 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$6^{2a} \div 6^b = 2, \quad 6^{2a-b} = 2$$

$$2^{\frac{1}{2a-b}} = (6^{2a-b})^{\frac{1}{2a-b}} = 6$$

29. $11^x = 25$, $275^y = 125$ 일 때, $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ 의 값은?

- ㉠ -2 ㉡ -1 ㉢ 0 ㉣ 1 ㉤ 2

해설

$$(11^x)^{\frac{1}{x}} = (25)^{\frac{1}{x}} \text{에서 } 5^{\frac{2}{x}} = 11$$

$$(275^y)^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}} \text{에서 } 5^{\frac{3}{y}} = 275 \text{이므로}$$

$$5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} = 11 \div 275 = \frac{1}{25}$$

$$5^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = 5^{-2}, \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -2$$

30. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

- ① $\sqrt[3]{8}$ ② $\sqrt[5]{8}$ ③ $\sqrt[3]{8}$ ④ $\sqrt[5]{4}$ ⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A , 확대 배율을 a 로 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^5$ 이므로

$$A \cdot a^5 = 2A \text{에서 } a^5 = 2 \quad \therefore a = \sqrt[5]{2}$$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

31. 16의 세제곱근 중 실수인 것을 a , -2 의 세제곱근 중에 실수인 것을 b 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$ ② -2 ③ 3 ④ $-\sqrt[3]{4}$ ⑤ 8

해설

16의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{16}$ 이므로

$$a = \sqrt[3]{16}$$

-2 의 세제곱근 중에 실수인 것은 $-\sqrt[3]{2}$ 이므로

$$b = -\sqrt[3]{2}$$

따라서, 구하는 값은

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$$

32. $\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}} \times \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ 1

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}} \times \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} \\ &= \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

33. 다음 중 옳은 것은?

① $a > 0$ 이고 $m, n(m > 0, n > 0)$ 이 정수일 때, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ 이다.

② $a > 0$ 일 때, $(\sqrt[n]{-a})^3 = -a$ 이다.

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 3이다.

④ n 이 짝수일 때, 3의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a}$ (단, $a > 0$)

해설

① $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm \sqrt[3]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}$

34. 다음 중 값이 다른 것은?

- ① $(\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$ ② $\left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
 ③ $\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}}$ ④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
 ⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}}$

해설

$$\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}} = (\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}$$

$$\textcircled{1} \sqrt{2}\sqrt{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{\sqrt{2}}{4}}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

$$\textcircled{2} \left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\sqrt{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2^{\frac{2}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{4} \left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\sqrt{2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2^{\frac{2}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{5} \sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

35. n 이 정수일 때, $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = (64^{-1})^{\frac{1}{n}} = 64^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$$

$2^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n

$n = -1$ 일 때, 2^6

$n = -2$ 일 때, 2^3

$n = -3$ 일 때, 2^2

$n = -6$ 일 때, 2

$$\therefore 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 64 = 78$$

36. 함수 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$ 인 양수)에 대하여 $f(\alpha) = \frac{1}{3}$, $f(\beta) = \frac{1}{2}$ 일 때, $f(\alpha + \beta)$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$
- ② $\frac{3}{5}$
- ③ $\frac{4}{5}$
- ④ $\frac{5}{7}$
- ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$f(\alpha) = \frac{a^\alpha - a^{-\alpha}}{a^\alpha + a^{-\alpha}} = \frac{1}{3}$$
$$3a^\alpha - 3a^{-\alpha} = a^\alpha + a^{-\alpha}$$
$$\therefore a^\alpha = 2a^{-\alpha}$$
$$\text{또, } f(\beta) = \frac{a^\beta - a^{-\beta}}{a^\beta + a^{-\beta}} = \frac{1}{2}$$
$$2a^\beta - 2a^{-\beta} = a^\beta + a^{-\beta} \therefore a^\beta = 3a^{-\beta}$$
$$f(\alpha + \beta) = \frac{a^{\alpha+\beta} - a^{-(\alpha+\beta)}}{a^{\alpha+\beta} + a^{-(\alpha+\beta)}} = \frac{a^\alpha a^\beta - a^{-\alpha} a^{-\beta}}{a^\alpha a^\beta + a^{-\alpha} a^{-\beta}} = \frac{6a^{-\alpha} a^{-\beta} - a^{-\alpha} a^{-\beta}}{6a^{-\alpha} a^{-\beta} + a^{-\alpha} a^{-\beta}} = \frac{5a^{-\alpha} a^{-\beta}}{7a^{-\alpha} a^{-\beta}} = \frac{5}{7}$$