1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항과 공비 r을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6} \cdot 3$ ③ $\frac{9}{2},\ 9$ ④ $\frac{1}{6},\ 9$ ⑤ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

해설

$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2},\ \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$

$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$

$\therefore a_1 = \frac{9}{2},\ r = 9$

2. 등비수열 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ② $\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ ③ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
④ $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$ ⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

해설

첫째항이 3이고, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

3. $a_n = 3 \cdot 2^{1-2n}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항과 공비 r을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}$　② $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$　③ $3,\ 2$　④ $3,\ 4$　⑤ $3,\ \frac{1}{2}$

해설

$a_1 = 3 \cdot 2^{1-2} = \frac{3}{2},\ a_2 = 3 \cdot 2^{1-2\cdot 2} = \frac{3}{8}$

$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$

$\therefore a_1 = \frac{3}{2},\ r = \frac{1}{4}$

4. 다음 등비수열에서 ( ) 안에 알맞은 수는?

$$32,\ -8,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ (\quad)$$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{1}{18}$ ③ $-\frac{1}{24}$ ④ $-\frac{1}{32}$ ⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$\frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{32}$

5. 세 수 $x-4,\ x,\ x+8$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

x가 $x-4,\ x,\ x+8$의 등비중항이므로
$x^2=(x-4)(x+8),\ x^2=x^2+4x-32$
$4x=32 \therefore x=8$

6. 세 수 $a,\ a+2,\ 2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a의 값은? (단, $a>0$)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

세 수 $a,\ a+2,\ 2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로
$(a+2)^2=a(2a+1)$
$a^2-3a-4=0$
$(a+1)(a-4)=0$
$\therefore\ a=4(\because a>0)$

7. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2x=1+5=6 \quad \therefore x=3$
세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$
따라서 $x^2+y^2=14$

8. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로
1, a_3, 64도 등비수열을 이룬다.
$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore \ a_3 = 8$

9. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r,\ 9r^2,\ 9r^3$으로 놓을 수 있다.
이때, $9r^4 = 144$이므로 $r^4 = 16$
$r^4 - 16 = 0,\ (r^2+4)(r^2+2)(r^2-2) = 0$
그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$
따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

10. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = x-3,\ a_2 = x,\ a_3 = x+6$이 성립할 때, a_5의 값은?

① 16　　② 24　　③ 32　　④ 48　　⑤ 52

해설

x는 $x-3$과 $x+6$의 등비중항이므로
$x^2 = (x-3)(x+6) = x^2 + 3x - 18$
$3x = 18 \quad \therefore x = 6$
즉, $a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.
$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

11. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10} = 48$, $S_{20} = 60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 48 \cdots$ ㉠

$S_{20} = \dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 60 \cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면

$\dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1} = \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r^{10}-1} = \dfrac{5}{4}$

$r^{10}+1 = \dfrac{5}{4}$ $\therefore$ $r^{10} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ $S_n = \dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} \cdot (r^{20}+r^{10}+1)$

$= 48\left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} + 1\right) = 63$

12. 두 수 A, B에 대하여 $A=2^{10}$, $B=5^{10}$일 때, 두 수 A, B의 곱 AB의 양의 약수의 총합을 A와 B의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A+1)(5B+1)$　② $(5A-1)(5B-1)$

③ $\frac{1}{4}(2A+1)(5B-1)$　④ $\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A-1)(5B-1)$

해설

$AB=2^{10}\cdot 5^{10}$

따라서 AB의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$

$=\frac{2^{11}-1}{2-1}\times\frac{5^{11}-1}{5-1}$

$=(2\cdot 2^{10}-1)\times\frac{1}{4}(5\cdot 5^{10}-1)$

$=(2A-1)\times\frac{1}{4}(5B-1)$

$=\frac{1}{4}(2A-1)(5B-1)$

13. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항　② 12항　③ 13항　④ 14항　⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.
그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로
$2^{11} = 2048$
$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$
$n - 1 \geq 11$
$n \geq 12$

14. 다음 값을 계산하면?

$$\log_3 9 + \log_3 9^2 + \log_3 9^4 + \cdots + \log_3 9^{2^{n-1}}$$

① $\log_3 9^{2^{n-1}}$ ② $\log_3 9^{2^n}$ ③ $\log_2(n-1)$

④ $2^n - 1$ ⑤ $2^{n+1} - 2$

해설

주어진 식은 $a_n = \log_3 9^{2^{n-1}}$ 인 수열의 합 S_n 이다.

$a_n = 2^{n-1} \cdot \log_3 9 = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$

a_n 은 첫째항이 2, 공비가 2 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

15. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.
$a_n = 2n+1,\ b_n = 3n+3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때, C_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 183

해설

$a_4 = b_2 = 9,\ a_7 = b_4 = 15,\ a_{10} = b_6 = 21,\ a_{13} = b_8 = 27,\ a_{16} = b_{10} = 33, \cdots$ 이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 9, 공차가 6인 등비수열이다.
$\therefore\ c_{30} = 9 + 29 \cdot 6 = 183$

16. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 $S_n = 2^{n+1} - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$의 값은?

① $\frac{2^{20}}{5}$ ② $\frac{2^{21}+5}{4}$ ③ $\frac{2^{21}-5}{3}$
④ 2^{20} ⑤ $2^{21}-5$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2)$
$S_1 = 2^2 - 3 = 1$이므로
$\therefore\ a_n = 2^n (n \geq 2),\ a_1 = 1$
$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 1 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{19}$
$= 1 + \frac{2^3\{(2^2)^9 - 1\}}{4-1}$
$= 1 + \frac{2^{21}}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2^{21}}{3}$

17. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = (3 \cdot 2^1 + k)$
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ㉠
따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 ㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로
$3 = 6 + k \quad \therefore \ k = -3$

18. 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ㉠

따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 ㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로

$3 = 6 + k \quad \therefore \ k = -3$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 보기와 같을 때, 보기 중 수열 $\{a_n\}$이 등비수열인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$　　㉡ $S_n = 2^{n-1} - 2$

㉢ $S_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \left(2^{n-2} - \frac{1}{2}\right) = 2^{n-2}$

이것은 $n = 1$일 때에도 성립하므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열이다.

㉡ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = -1$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n-1} - 2) - (2^{n-2} - 2) = 2^{n-2}$

이것은 $n = 1$일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

㉢ $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{3}{8}$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right\} - \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

이것은 $n = 1$일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

따라서 보기 중 등비수열인 것은 ㉠이다.

20. $a,\ b,\ c$는 $1 < a < b < c < 9$인 정수이고, 수열 $0.a,\ 0.0b,\ 0.00c,\ \cdots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

① $0.00\dot{1}\dot{5}$　　② $0.00\dot{1}\dot{6}$　　③ $0.001\dot{6}$

④ $0.001\dot{7}$　　⑤ $0.00\dot{1}\dot{7}$

해설

$0.\dot{a} = \frac{a}{9},\ 0.0\dot{b} = \frac{b}{90},\ 0.00\dot{c} = \frac{c}{900}$ 이므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900}$ 에서 $b^2 = ac$

즉, $a,\ b,\ c$는 이 순서로 등비수열을 이루고

$1 < a < b < c < 9$인 정수이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9},\ \frac{4}{90},\ \frac{8}{900}, \cdots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$