

1. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $b - a$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x - 4)(x + 2) < 0$
 $\therefore -2 < x < 4$
 $b - a = 6$

2. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x - 3)^2 \geq 0$, (실수) $^2 \geq 0$ 이므로
∴ ⑤ 모든 실수

3. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 를 만족하는 x 가 오직 1개이기 위한 양수 a 가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$

② $2 < a < 5$

③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$

⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 의 해가

1개 존재하기 위해서는

$x^2 + ax + a + 3 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

$$\therefore D = a^2 - 4(a + 3)$$

$$= a^2 - 4a - 12$$

$$= (a - 6)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

4. 부등식 $3x^2 \geq 2|x-1| + 3$ 의 해가 $x \leq \alpha$ 또는 $x \geq \beta$ 일 때, $3\alpha + \beta$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

(i) $x < 1$ 일 때,
 $3x^2 \geq -2(x-1) + 3, 3x^2 + 2x - 5 \geq 0$
 $(x-1)(3x+5) \geq 0 \therefore x \leq -\frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 1$
그런데 $x < 1$ 이므로 $x \leq -\frac{5}{3}$
(ii) $x \geq 1$ 일 때,
 $3x^2 \geq 2(x-1) + 3, 3x^2 - 2x - 1 \geq 0$
 $(x-1)(3x+1) \geq 0 \therefore x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 1$
그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x \geq 1$
(i), (ii)에 의해 $\therefore x \leq -\frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 1$
따라서 $\alpha = -\frac{5}{3}, \beta = 1$ 이므로 $3\alpha + \beta = -4$

5. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면?

$|x^2 - 2x| = y - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$ $y \leq x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2 - 2x| + 1$ 이므로
㉡에 대입하면 $|x^2 - 2x| \leq x$
(i) $x^2 - 2x \geq 0$ ($x \leq 0, x \geq 2$) 일 때
 $x^2 - 2x \leq x$
 $\therefore x(x - 3) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 3$
조건과 공통범위를 구하면 $x = 0, 2 \leq x \leq 3$
(ii) $x^2 - 2x < 0$ ($0 < x < 2$) 일 때
 $-(x^2 - 2x) \leq x$
 $\therefore x(x - 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq 0, x \geq 1$
조건과 공통 범위를 구하면 $1 \leq x < 2$
(i), (ii) 에서 정수 x 를 구하면 $x = 0, 1, 2, 3$
 x 의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1, 2, 1, 4$
구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4)$
따라서 구하는 개수는 4 개다.

6. 부등식 $|x^2 + x + 1| \leq |x + 2|$ 의 해는?

① $x \leq -1$

② $-1 \leq x \leq 1$

③ $x \geq 1$

④ 해는 없다.

⑤ 모든 실수

해설

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로}$$

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 \leq |x + 2| \text{에서}$$

$$(i) \ x < -2 \text{일 때,}$$

$$x^2 + x + 1 \leq -(x + 2), \ x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

$$(x + 1)^2 + 2 \leq 0$$

$$\text{그런데 } (x + 1)^2 > 0 \text{이므로 해는 없다.}$$

$$(ii) \ x \geq -2 \text{일 때,}$$

$$x^2 + x + 1 \leq x + 2, \ x^2 \leq 1$$

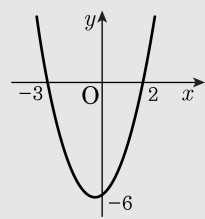
$$\therefore -1 \leq x \leq 1$$

$$(i), (ii) \text{에 의해 } \therefore -1 \leq x \leq 1$$

7. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$ 을 풀면?

- ① $x < -3$ 또는 $x > 2$ ② $x < -2$ 또는 $x > 3$
③ $x < -1$ 또는 $x > 4$ ④ $x < 0$ 또는 $x > 5$
⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x + 3)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$ 의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

8. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2 - 6x + 1 \leq 0$

② $x^2 - 2x - 3 < 0$

③ $x^2 - x + 1 > 0$

④ $x^2 - 6x + 9 > 0$

⑤ $4x^2 - 4x + 1 < 0$

해설

① $(x - \frac{3 - \sqrt{7}}{2})(x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2}) \leq 0$
 $\Rightarrow \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$

② $(x + 1)(x - 3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

③ $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x - 1)^2 < 0 \Rightarrow$ 해는 없다

9. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 0$

② $-1 < a < 3$

③ $0 \leq a \leq 3$

④ $-1 < a < 4$

⑤ $-1 \leq a \leq 4$

해설

(i) $a = 0$ 일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 에서 $D \leq 0$ 이므로

$$a^2 - 3a \leq 0$$

$\therefore 0 < a \leq 3 (\because a \neq 0)$

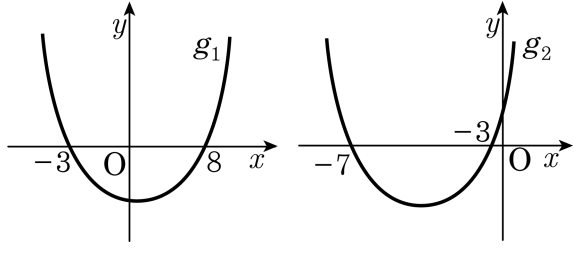
10. 이차함수 $y = x^2 + 2x + 4$ 의 그래프가 직선 $y = 3x + 10$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $x < a$ 또는 $x > b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은? (단, $a < b$ 이다.)

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x + 4 > 3x + 10$ 에서 $x^2 - x - 6 > 0$, $(x + 2)(x - 3) > 0$
 $\therefore x < -2$ 또는 $x > 3$
따라서, $a = -2$, $b = 3$ 이므로 $a + b = 1$

11. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
 을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
 $(\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5)$
 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0, (x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
 따라서 만족하는 정수는 13 (개)

12. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

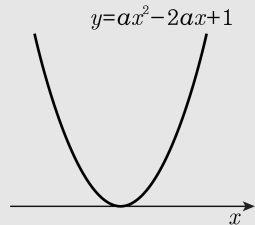
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

13. 다음 이차연립부등식을 만족하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

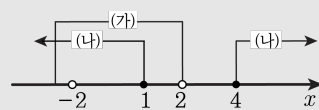
- ① $x \leq -3$ ② $-2 < x \leq 1$ ③ $-1 \leq x < 2$
 ④ $0 < x \leq 2$ ⑤ $x > 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, (x+2)(x-2) < 0 \\ \therefore -2 < x < 2 \cdots (가) \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0, \\ x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq \cdots (나) \end{cases}$$

따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면

$-2 < x \leq 1$ 이다.



14. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow (x - 1)^2 \leq 0$$

$(x - 1)^2$ 은 항상 0 이상이므로

만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$$

$$\rightarrow (x + 1)^2 + 1 \geq 1$$

$\therefore$ 모든 실수

$$\therefore x = 1$$

15. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \end{cases}$ 을 풀면?

- ㉠ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$
㉡ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $2 \leq x \leq 3$
㉢ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$
㉣ $-2 \leq x \leq 1$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$
㉤ $-2 \leq x \leq 1$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

해설

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad (x-3)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \quad (2x-3)(2x-1) \geq 0$$

$$x \geq \frac{3}{2}, \quad x \leq \frac{1}{2}$$

㉠과 ㉡의 공통범위 :

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 3$$