

1. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x + a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x + 1)^2 = -2$

$\therefore a = 1, b = -2$

$\therefore a - b = 3$

2. 두 직선 $x + y = 4$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

- ① $y = 4x + 7$ ② $y = 4x - 7$ ③ $y = -4x + 7$
④ $y = -4x - 7$ ⑤ $y = -x + 7$

해설

두 직선의 방정식

$$\begin{cases} x + y = 4 & \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y + 1 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x = 1, y = 3$$

즉, 교점 $(1, 3)$ 과 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1)$$

$$\text{즉, } y = -4x + 7$$

3. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 포함하고, 5는 포함하지 않는 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 포함하고, 5를 포함하지 않는 집합의 개수는 집합 $\{3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2 = 4$ (개)이다.

5. 다음 중 집합 $A - (B - C)$ 와 같은 집합은?

① $(A - B) - (A - C)$

② $(A - B) \cup (A \cap C)$

③ $(A - B) - C$

④ $(A \cap B) - C$

⑤ $A - (B \cup C)$

해설

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A - (B \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

6. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢
- ④ ㉡,㉢

⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f : X \rightarrow Y, f^{-1} : Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1} : Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f : X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

7. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $n \geq 3$ 일 때, $S_n = 94$ 를 만족하는 d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$S_n = 94 \text{에서 } \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2} = 94$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 n 의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$$n = 4 \text{일때, } 2 + (4-1)d = 47 \quad \therefore d = 15$$

$$n = 47 \text{일때, } 2 + (47-1)d = 4 \quad \therefore d = \frac{2}{23}$$

$$n = 94 \text{일때, } 2 + (94-1)d = 2 \quad \therefore d = 0$$

$$n = 188 \text{일때, } 2 + (188-1)d = 1 \quad \therefore d = -\frac{1}{187}$$

이 중에서 d 가 자연수가 되는 것은 $n = 4$ 이므로 $d = 15$

8. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{A} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

9. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

두 식 A, B 의 최대공약수를 G 라 하면

$A = Ga, B = Gb(a, b$ 는 서로소)

$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$

$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

$\therefore G = x + 2$

10. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$$P\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1}\right) = (2, 4)$$

$$Q\left(\frac{2 \times 2 - 1 \times 0}{2 - 1}, \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1}\right) = (4, 12) \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ 이다.}$$

11. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

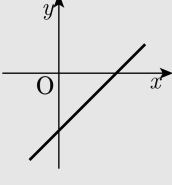
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore$ (기울기) > 0 , (y 절편) < 0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



12. 세 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$ 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낸 것으로 옳은 것을 골라라.

① $A \subset B \subset C$

② $A \subset C \subset B$

③ $B \subset A \subset C$

④ $A \subset B = C$

⑤ $B \subset A = C$

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{1, 3, 9\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\therefore B \subset A \subset C$$

13. 집합 $\{1, 2\} \subset X \subset \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$\{1, 2\} \subset X \subset \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 이므로
집합 X 는 $\{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 의 부분집합 중
원소 1, 2 를 포함하는 집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^{4-2} = 4$ (개)

14. 두 집합 $A = \{5, 7, 10\}$, $B = \{x-4, x-2, x+1\}$ 이 서로 같을 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x-4, x-2, x+1$ 의 크기를 비교해 보면 $x-4 < x-2 < x+1$ 이므로

$A = B$ 이려면 $x-4 = 5, x-2 = 7, x+1 = 10$ 이 되어야 한다.
따라서 $x = 9$ 이다.

15. 전체 집합 $U = \{x|x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x|x \text{는 짝수}\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B = \{3\}$

② $A - B = \{2, 4, 6\}$

③ $B \cap A^c = \{2, 3, 5\}$

④ $A^c \cap B^c = \{2, 9\}$

⑤ $(A \cup B)^c = \{1, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

① $A \cap B = \{2\}$

② $A - B = \{4, 6, 8\}$

③ $B \cap A^c = \{3, 5, 7\}$

④ $A^c \cap B^c = \{1, 9\}$

16. 1부터 100까지의 자연수 중에서 k 의 배수의 집합을 A_k 라고 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_4 \cup A_5)$ 의 원소의 개수는?

① 30개 ② 31개 ③ 32개 ④ 33개 ⑤ 34개

해설

$$\begin{aligned} & A_2 \cap (A_4 \cup A_5) \\ &= (A_2 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_5) \\ &= A_4 \cup A_{10} \\ \therefore n(A_4 \cup A_{10}) \\ &= n(A_4) + n(A_{10}) - n(A_4 \cap A_{10}) \\ &= n(A_4) + n(A_{10}) - n(A_{20}) \\ &= 25 + 10 - 5 = 30 \end{aligned}$$

17. 다음 중 절대부등식 $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a = b$

② $ab > 0$

③ $a = b = 0$

④ $a > b$

⑤ $b > a$

해설

$$a^2 + b^2 + ab = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \quad (\because \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0)$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq ab$$

단, 등호는 $a + \frac{1}{2}b = 0$ 이고 $b = 0$

즉, $a = 0$ 이고 $b = 0$ 일 때, 성립한다.

18. 두 수 $\frac{1}{7}$ 과 $\frac{1}{3}$ 의 사이에 세 개의 수 x, y, z 를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 조화수열을 이루려면 $7, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 3$ 이 등차수열을 이루어야 하므로

$$\frac{1}{x} = 6, \frac{1}{y} = 5, \frac{1}{z} = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60(x+y+z) = 60\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 60 \cdot \frac{37}{60} = 37$$

19. 각 항이 실수이고, 제2항이 8, 제5항이 64인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① 2^9

② 2^{10}

③ 2^{11}

④ 2^{12}

⑤ 2^{13}

해설

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = ar = 8 \cdots \textcircled{1}$

$$a_5 = ar^4 = 64 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 으로 나누면 $r^3 = 8 \therefore r = 2$

$\textcircled{1}$ 으로부터 $a = 4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \therefore a_{10} = 2^{11}$$

20. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$ 의 값은?

① 1310

② 1320

③ 1330

④ 1340

⑤ 1350

해설

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot (20 - 1) + 2 \cdot (20 - 2) + 3 \cdot (20 - 3) + \cdots + 19 \cdot (20 - 19) \\ &= \sum_{k=1}^{19} k(20 - k) = \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2) \\ &= 20 \times \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} \\ &= 190(20 - 13) = 1330 \end{aligned}$$

21. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

22. 어느 도시의 최근 인구 증가율은 연평균 4%라고 한다. 이 도시의 인구가 이러한 추세로 증가한다면 10년 후의 이 도시의 인구는 현재의 k 배이다. 이때, $100k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 1.04 = 0.017, \log 1.48 = 0.17$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 148

해설

일정한 비율로 증가하거나 감소한 후의 양을 지수의 식으로 나타낸다.
현재 이 도시의 인구의 수를 A 라 하면 10년 후의 이 도시의 인구의 수는 kA 이다.
 $A(1 + 0.04)^{10} = kA, 1.04^{10} = k$
이 식의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 1.04^{10} = \log k$
이 때, $10 \log 1.04 = 10 \times 0.017$ 이므로
 $\log k = 0.17 \therefore k = 1.48$
 $\therefore 100k = 148$

23. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $\alpha + \beta = 3$
한편, $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $2x + 1 = \alpha, 2x + 1 = \beta$
즉, $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$ 이다.
$$\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 3$
 $f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하면
 $f(2x + 1) = k(2x + 1 - \alpha)(2x + 1 - \beta)$
 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$
 $\therefore \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$

24. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60

② 65

③ 68

④ 72

⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$
 $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $\therefore 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$
 $= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7b + 22(c^3)^7$
 $= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로
①에서 $b = 1$ 이다.
 $\therefore 21b + 44 = 65$

25. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

- ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$2x - y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $3x - 4y + 9 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $4x + 3y + 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $x = 5, y = 6$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면 $x = 0, y = -4$
 $\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면 $x = -3, y = 0$
세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 이루어지는 삼각형은 세 점 $A(5, 6), B(0, -4), C(-3, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.
따라서 점 $(5, 6)$ 과 직선 $4x + 3y + 12 = 0$
사이의 거리는 $\frac{|4 \times 5 + 3 \times 6 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|50|}{5} = 10$
또, $\overline{BC} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = 5$
따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$

26. 세 원 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a - b$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{95}}{5}$
 ② $\frac{\sqrt{101}}{5}$
 ③ $\frac{\sqrt{105}}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{110}}{5}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$
 $\therefore 2x + y - 6 = 0 \dots\dots\textcircled{1}$
 원 C_3 의 방정식을 변형하면
 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - 25 = 0$ 이고,
 두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은
 $(2a - 4)x + (2b - 4)y - (a^2 + b^2 - 29) = 0 \dots\textcircled{2}$
 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로
 $\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$
 $\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1}$ 에서 $2a - 4 = 4b - 8$
 $\therefore a = 2b - 2 \dots\dots\textcircled{3}$
 $\frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$ 에 $\textcircled{3}$ 을 대입하면
 $12b - 24 = (2b - 2)^2 + b^2 - 29$
 $5b^2 - 20b - 1 = 0$
 $\therefore b = \frac{10 \pm \sqrt{105}}{5}$
 그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \frac{10 + \sqrt{105}}{5}$
 $\therefore a - b = \frac{\sqrt{105}}{5}$

27. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 교점을 P, Q 라할 때,
선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수 r 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A : x^2 + y^2 = r^2, B : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
라고 하면
 $\overline{PQ}$ 가 원 B 의 지름일 때
 $\overline{PQ}$ 의 길이는 최대가 된다.
 $\therefore r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$

28. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

29. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여 $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_n(x)$ (x 은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n 개)

- ① 2007
- ② 2008
- ③ 2009
- ④ 4015
- ⑤ 4016

해설

$$f(x) = x + 2$$
$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x + 2) + 2 = x + 4$$
$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = (x + 4) + 2 = x + 6$$
$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = (x + 6) + 2 = x + 8$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = x + 2n$$
$$\therefore f^{2007}(1) = 1 + 2 \times 2007 = 4015$$

30. 함수 $f(x) = -x + 3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\dots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \dots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$$= f(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \dots$$

$$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3 \text{ 이다.}$$

$$3 \text{ 이 } 1002 \text{ 개이므로 } 3 \times 1002 = 3006$$

31. $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 일 때, $x^3 - 2x^2 - 2x + 5$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{15}$

해설

$$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \text{에서 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{9 - 5} + 3 - \sqrt{5} = 2$$

$$\therefore x^3 - 2x^2 - 2x + 5 = 2x - 4 - 2x + 5 = 1$$

32. $\log x$ 의 정수 부분이 5이고 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. 이때 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분과 소수 부분의 곱은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$\log x$ 의 소수 부분을 α 라고 하면

$$\log x = 5 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(5 + \alpha) = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 + \frac{1 + \alpha}{2}$$

이때 $0 \leq \alpha < 1$ 이므로

$$1 \leq 1 + \alpha < 2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1 + \alpha}{2} < 1$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{1 + \alpha}{2}$ 이다.

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\alpha + \frac{1 + \alpha}{2} = 1, \quad \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

그러므로 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 소수 부분과 정수 부분의 곱은 $\frac{4}{3}$

33. $a^3 + b^3 + c^3 = p(a + b + c)^3 + q(a + b + c)(ab + bc + ca) + rabc$ 가 a, b, c 에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r 의 값을 정할 때, $p + q + r$ 을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ -23 ⑤ 23

해설

$a^3 + b^3 + c^3 = p(a + b + c)^3 + q(a + b + c)(ab + bc + ca) + rabc$ 에서 a, b, c 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = 0, c = 0 : 1 = p \cdots$ ①
 $a = 1, b = 1, c = 0 : 2 = 2p + 2q \cdots$ ②
 $a = 1, b = 1, c = 1 : 3 = 27p + 9q + r \cdots$ ③
①, ②, ③에서 $p = 1, q = 0, r = -24$
 $\therefore p + q + r = -23$

34. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 4이므로
 $f(-1)=4$
 $f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots\textcircled{1}$
 $f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
 $\quad=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2\ (\because \textcircled{1})$
양변에 $x=-1$ 를 대입하면
 $f(-1)=4a=4\therefore a=1$
 $ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
 $\therefore b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c 를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$ 를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
 $f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$ 를 대입하면
 $f(1)=0+(a+b+c)=0$
 $\therefore a+b+c=0$

35. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 α 의 켈레복소수, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켈레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
 ㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
 ㉢ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
 ㉣ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.
 ㉤ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

①⑦

② ㄱ, ㄴ

③ L, C, Z

④ ⑦, ③, ②

⑤ ⑦, ③, ②, ④

해설

$$\alpha = a + bi, \beta = c + di \quad (a, b, c, d \text{는 실수})$$

$$\textcircled{7} \alpha = \bar{\beta} \Rightarrow \beta = \bar{\alpha}$$

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0(\text{참})$$

Ⓛ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

$$\textcircled{\ominus} \alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi(\text{거짓})$$

$$\textcircled{2} \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow \text{실수 (거짓)}$$

ⓐ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0, b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

36. 직선 $y = -2x + 2$ 에 접하는 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 x 축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하는 식은
 $x^2 + ax + b = -2x + 2$
 $x^2 + ax + b = -2x + 2 \Rightarrow x^2 + (a+2)x + b-2 = 0$
두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.
 $D = (a+2)^2 - 4(b-2) = 0$
 $\therefore b = \frac{1}{4}(a^2 + 4a + 12) \quad \cdots \textcircled{1}$
포물선과 x 축과의 교점의 x 좌표를 구하는 식은
 $x^2 + ax + b = 0$ 이 방정식의 두 근을 α, β 라 하면
 $|\alpha - \beta| = 2$ 이므로 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4b = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a^2 - (a^2 + 4a + 12) = 4$
 $\therefore a = -4, b = 3 \quad \therefore a + b = -1$

37. $x + 3y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq -2$ 일 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + \frac{1}{m}$ 의 값은?

- ① 53
- ② 58
- ③ 63
- ④ 68
- ⑤ 72

해설

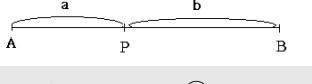
$x + 3y = 1$ 로부터 $x = 1 - 3y \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
그런데 $x \geq 0$ 이므로
 $x = 1 - 3y \geq 0 \therefore y \leq \frac{1}{3} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
또 $y \geq -2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $-2 \leq y \leq \frac{1}{3}$
 $x^2 + y^2 = k$ 라 하고 이 식에 $\textcircled{㉠}$ 을 대입하면
 $(1 - 3y)^2 + y^2 = 1 - 6y + 9y^2 + y^2 \therefore 10\left(y^2 - \frac{6}{10}y\right) + 1 = k$
 $\qquad \qquad \qquad = 10y^2 - 6y + 1 = k$
 $\rightarrow 10\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{10} + 1 = k$
 $\rightarrow 10\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} = k$
 $\begin{cases} \therefore y = \frac{3}{10} \text{ 일 때 } k = \frac{1}{10} : \text{ 최솟값 } m \\ y = -2 \text{ 일 때 } k = 53 : \text{ 최댓값 } M \\ y = \frac{1}{3} \text{ 일 때 } k = \frac{1}{9} \end{cases}$
 $\therefore M + \frac{1}{m} = 53 + 10 = 63$

38. 거리가 100 m인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

- ① 20 m
- ② 30 m
- ③ $\frac{100}{3}$ m
- ④ $\frac{121}{4}$ m
- ⑤ $\frac{147}{5}$ m

해설

갑의 속도를 α , 을의 속도를 β 라 하자.



$a + b = 100 \cdots \textcircled{1}$

$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}, \quad \frac{b}{\alpha} = 8, \quad \frac{a}{\beta} = 2$

정리하면 $\frac{a}{\left(\frac{b}{8}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)}$ 에서

$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{8}, \quad 4a^2 = b^2$

$\therefore b = 2a (\because a, b \text{는 양수})$

①에 대입하면, $3a = 100 \quad a = \frac{100}{3} \text{ m}$

39. 두 함수 $y = \sqrt{x+4}$, $y = x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

- ① $3 \leq k < \frac{16}{3}$ ② $3 \leq k < \frac{15}{4}$ ③ $4 \leq k < \frac{17}{4}$
 ④ $4 \leq k < \frac{16}{3}$ ⑤ $4 \leq k < \frac{16}{5}$

해설

i) $y = x+k$ 가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -4 + k \quad \therefore k = 4$$

ii) $y = x+k$ 와 $y = \sqrt{x+4}$ 가 접할 때

$x+k = \sqrt{x+4}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 + 2kx + k^2 = x + 4$$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 4 = 0$$

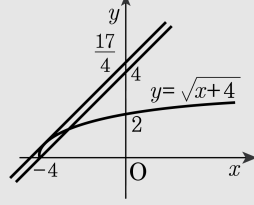
$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$$

$$-4k + 1 + 16 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$$

(i), (ii)에서 $y = \sqrt{x+4}$ 와 $y =$

$x+k$ 가 두 점에서 만나려면

$4 \leq k < \frac{17}{4}$ 이어야 한다.



40. $0 < a < 1$ 이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 일 때, $\frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{15}$

② $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$$

$$\therefore a + a^{-1} = 8$$

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a - a^{-1} = a - \frac{1}{a} < 0$$

$$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$$

$$\therefore \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = -\frac{2\sqrt{15}}{8} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$