1. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2+2x+1)+2=0$, $\quad (x+1)^2=-2$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

2. 두 직선 $x+y=4$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=4x+7$ ② $y=4x-7$ ③ $y=-4x+7$

④ $y=-4x-7$ ⑤ $y=-x+7$

해설

두 직선의 방정식

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots ㉠ \\ 2x-y+1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=3$

즉, 교점 $(1,\ 3)$ 과 $(2,\ -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-1-3}{2-1}(x-1)$$

즉, $y=-4x+7$

3. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4이다.

4. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2 는 반드시 포함하고, 5 는 포함하지 않는 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2 를 반드시 포함하고, 5 를 포함하지 않는 집합의 개수는 집합 $\{3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2 = 4$ (개) 이다.

5. 다음 중 집합 $A-(B-C)$ 와 같은 집합은?

① $(A-B)-(A-C)$

② $(A-B)\cup(A\cap C)$

③ $(A-B)-C$

④ $(A\cap B)-C$

⑤ $A-(B\cup C)$

해설

$$\begin{aligned} A-(B-C) &= A-(B\cap C^c) \\ &= A\cap(B\cap C^c)^c = A\cap(B^c\cup C) \\ &= (A\cap B^c)\cup(A\cap C) \\ &= (A-B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

6. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.

㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.

㉢ 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉡,㉢　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$

㉢. $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ 이므로,
$f \circ f^{-1} : Y \to Y, f^{-1} \circ f : X \to X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

7. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47$ $\quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4$ $\quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2$ $\quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1$ $\quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

8. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_7 = ar^6 = 96 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \dfrac{3}{2}$

첫째항은 $\dfrac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

9. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax+b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=Ga, B=Gb(a, b$는 서로소$)$

$A+B=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$

$L=abG=(x-1)(x-3)(x+2)$

$\therefore\ G=x+2$

10. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1 로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1 로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times3+1\times0}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)=(2,4)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times2-1\times0}{2-1}, \frac{2\times6-1\times0}{2-1}\right)=(4,12)$$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4-2)^2+(12-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$ 이다.

11. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 조건에서

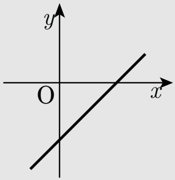
$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



12. 세 집합 $A = \{x|x$는 10 이하의 홀수$\}$, $B = \{x|x$는 9의 약수$\}$, $C = \{x|x$는 10보다 작은 자연수$\}$ 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낸 것으로 옳은 것을 골라라.

① $A \subset B \subset C$　② $A \subset C \subset B$　③ $B \subset A \subset C$

④ $A \subset B = C$　⑤ $B \subset A = C$

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{1, 3, 9\}$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore\ B \subset A \subset C$

13. 집합 $\{1,\ 2\} \subset X \subset \{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$\{1,\ 2\} \subset X \subset \{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 이므로
집합 X 는 $\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 의 부분집합 중
원소 1, 2 를 포함하는 집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^{4-2} = 4$ (개)

14. 두 집합 $A = \{5,\ 7,\ 10\}$, $B = \{x-4,\ x-2,\ x+1\}$ 이 서로 같을 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x-4,\ x-2,\ x+1$ 의 크기를 비교해 보면 $x-4 < x-2 < x+1$ 이므로
$A = B$ 이려면 $x-4 = 5,\ x-2 = 7,\ x+1 = 10$ 이 되어야 한다.
따라서 $x = 9$ 이다.

15. 전체집합 $U = \{x | x$는 9 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x$는 짝수$\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B = \{3\}$

② $A - B = \{2, 4, 6\}$

③ $B \cap A^c = \{2, 3, 5\}$

④ $A^c \cap B^c = \{2, 9\}$

⑤ $(A \cup B)^c = \{1, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

① $A \cap B = \{2\}$

② $A - B = \{4, 6, 8\}$

③ $B \cap A^c = \{3, 5, 7\}$

④ $A^c \cap B^c = \{1, 9\}$

16. 1부터 100까지의 자연수 중에서 k의 배수의 집합을 A_k라고 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_4 \cup A_5)$ 의 원소의 개수는?

① 30개 ② 31개 ③ 32개 ④ 33개 ⑤ 34개

해설

$A_2 \cap (A_4 \cup A_5)$
$= (A_2 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_5)$
$= A_4 \cup A_{10}$
$\therefore n(A_4 \cup A_{10})$
$\quad = n(A_4) + (A_{10}) - n(A_4 \cap A_{10})$
$\quad = n(A_4) + n(A_{10}) - n(A_{20})$
$\quad = 25 + 10 - 5 = 30$

17. 다음 중 절대부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a=b$ ② $ab>0$ ③ $a=b=0$

④ $a>b$ ⑤ $b>a$

해설

$a^2+b^2+ab=a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0 \ (\because \ \left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \ \frac{3}{4}b^2 \ 0)$

$\therefore a^2+b^2 \geq ab$

단, 등호는 $a+\frac{1}{2}b=0$ 이고 $b=0$

즉,$a=0$ 이고 $b=0$일 때, 성립한다.

18. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$\frac{1}{x}=6$, $\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{z}=4$

$\therefore\ x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$

19. 각 항이 실수이고, 제2항이 8, 제5항이 64인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① 2^9　② 2^{10}　③ 2^{11}　④ 2^{12}　⑤ 2^{13}

해설

첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_2 = ar = 8 \cdots\cdots$ ㉠

$a_5 = ar^4 = 64 \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡으로 나누면 $r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$

㉠으로부터 $a = 4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \therefore a_{10} = 2^{11}$

20. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$의 값은?

① 1310 ② 1320 ③ 1330 ④ 1340 ⑤ 1350

해설

$$1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$$
$$= 1 \cdot (20-1) + 2 \cdot (20-2) + 3 \cdot (20-3) + \cdots + 19 \cdot (20-19)$$
$$= \sum_{k=1}^{19} k(20-k) = \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2)$$
$$= 20 \times \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}$$
$$= 190(20-13) = 1330$$

21. $2^x = 3$ 일 때, $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{3}{13}$ ③ $\dfrac{3}{10}$ ④ $\dfrac{3}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{2^x - \dfrac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \dfrac{1}{(2^x)^2}}$$

$$= \frac{3 - \dfrac{1}{3}}{3^2 - \dfrac{1}{3^2}} = \frac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{80}{9}} = \frac{3}{10}$$

22. 어느 도시의 최근 인구 증가율은 연평균 4% 라고 한다. 이 도시의 인구가 이러한 추세로 증가한다면 10년 후의 이 도시의 인구는 현재의 k 배이다. 이때, $100k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 1.04 = 0.017, \log 1.48 = 0.17$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 148

해설

일정한 비율로 증가하거나 감소한 후의 양을 지수의 식으로 나타낸다.
현재 이 도시의 인구의 수를 A 라 하면 10년 후의 이 도시의 인구의 수는 kA 이다.
$A(1+0.04)^{10} = kA, 1.04^{10} = k$
이 식의 양변에 상용로그를 취하면
$\log 1.04^{10} = \log k$
이 때, $10 \log 1.04 = 10 \times 0.017$ 이므로
$\log k = 0.17 \quad \therefore \ k = 1.48$
$\therefore 100k = 148$

23. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$\alpha+\beta=3$

한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$

즉, $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$이다.

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta=3$

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면

$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$

$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

24. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60　② 65　③ 68　④ 72　⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \;\; b^3 = 1 \;\; c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \;\; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

① 에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \;\; 21b + 44 = 65$

25. 세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10　　② 15　　③ 20　　④ 25　　⑤ 30

해설

$2x-y-4=0 \cdots\cdots ㉠$

$3x-4y+9=0 \cdots\cdots ㉡$

$4x+3y+12=0 \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=6$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-4$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=0$

세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 이루어지는

삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0,-4)$, $C(-3,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.

따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x+3y+12=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|4\times5+3\times6+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|50|}{5}=10$

또, $\overline{BC}=\sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2}=5$

따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

26. 세 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{101}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{105}}{5}$
④ $\dfrac{\sqrt{110}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-4x-4y+4)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 2x+y-6=0 \cdots\cdots$ ㉠

원 C_3 의 방정식을 변형하면

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-25=0$ 이고,

두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은

$(2a-4)x+(2b-4)y-(a^2+b^2-29)=0 \cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$$

$\dfrac{2a-4}{2}=\dfrac{2b-4}{1}$ 에서 $2a-4=4b-8$

$\therefore a=2b-2 \cdots\cdots$ ㉢

$\dfrac{2b-4}{1}=\dfrac{a^2+b^2-29}{6}$ 에 ㉢을 대입하면

$12b-24=(2b-2)^2+b^2-29$

$5b^2-20b-1=0$

$\therefore b=\dfrac{10\pm\sqrt{105}}{5}$

그런데 $b>0$ 이므로 $b=\dfrac{10+\sqrt{105}}{5}$

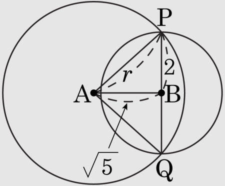
$\therefore a-b=\dfrac{\sqrt{105}}{5}$

27. 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 의 교점을 P, Q라할 때, 선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수 r 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A: x^2+y^2=r^2, B:(x-2)^2+(y-1)^2=4$
라고 하면
$\overline{\text{PQ}}$가 원 B 의 지름일 때
$\overline{\text{PQ}}$의 길이는 최대가 된다.
$\therefore \quad r=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$



28. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

29. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여 $f^n(x) = \underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x)$($x$은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은? (단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n개)

① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$$f(x) = x + 2$$
$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x+2) + 2 = x + 4$$
$$f^3(x) = \left(f \circ f^2\right)(x) = f(f^2(x)) = (x+4) + 2 = x + 6$$
$$f^4(x) = \left(f \circ f^3\right)(x) = f(f^3(x)) = (x+6) + 2 = x + 8$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = x + 2n$$
$$\therefore f^{2007}(1) = 1 + 2 \times 2007 = 4015$$

30. 함수 $f(x) = -x+3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\cdots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1)+f^{(2)}(1)+f^{(3)}(2)+f^{(4)}(2)+\cdots+f^{(2003)}(1002)+f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$= f(x)$ 이므로

$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3$ 이므로

$f(1)+f^{(2)}(1) = 3, \ \cdots$

$f^{(2003)}(1002)+f^{(2004)}(1002) = 3$ 이다.

3 이 1002 개이므로 $3 \times 1002 = 3006$

31. $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$일 때, x^3-2x^2-2x+5의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{15}$

해설

$x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$에서 양변을 제곱하면

$x^2=3+\sqrt{5}-2\sqrt{9-5}+3-\sqrt{5}=2$

$\therefore\ x^3-2x^2-2x+5=2x-4-2x+5=1$

32. $\log x$의 정수 부분이 5이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. 이때 $\log\sqrt{x}$의 정수 부분과 소수 부분의 곱은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$\log x$의 소수 부분을 α라고 하면

$\log x = 5 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x = \frac{1}{2}(5+\alpha) = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$= 2 + \frac{1+\alpha}{2}$

이때 $0 \leq \alpha < 1$이므로

$1 \leq 1+\alpha < 2,\ \frac{1}{2} \leq \frac{1+\alpha}{2} < 1$

따라서 $\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{1+\alpha}{2}$이다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\alpha + \frac{1+\alpha}{2} = 1,\ \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}\quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$

그러므로 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 소수 부분과 정수 부분의 곱은 $\frac{4}{3}$

33. $a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(a+b+c)(ab+bc+ca)+rabc$가 a, b, c에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r의 값을 정할 때, $p+q+r$을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ -23 ⑤ 23

해설

$a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(ab+bc+ca)+rabc$에서

a, b, c에 대한 항등식이므로

$a=1, b=0, c=0 : 1=p \cdots$ ①

$a=1, b=1, c=0 : 2=2p+2q \cdots$ ②

$a=1, b=1, c=1 : 3=27p+9q+r \cdots$ ③

①, ②, ③에서 $p=1$, $q=0$, $r=-24$

$\therefore\ p+q+r=-23$

34. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c라 하면 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 4이므로
$f(-1)=4$
$f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots$㉠
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
$\quad\quad=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2$ ($\because$ ㉠)
양변에 $x=-1$를 대입하면
$f(-1)=4a=4 \therefore a=1$
$ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
$\therefore\ b=-2, c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$를 대입하면
$f(1)=0+(a+b+c)=0$
$\therefore a+b+c=0$

35. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 α 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
㉢ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.
㉤ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)

㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha\overline{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)

㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\; b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

36. 직선 $y=-2x+2$에 접하는 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 x축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a+b$의 값은?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x좌표를 구하는 식은

$x^2+ax+b=-2x+2$ $x^2+(a+2)x+b-2=0$

두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.

$\mathrm{D}=(a+2)^2-4(b-2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{4}(a^2+4a+12)\quad\cdots$ ㉠

포물선과 x축과의 교점의 x좌표를 구하는 식은

$x^2+ax+b=0$ 이 방정식의 두 근을 α, β라 하면

$|\alpha-\beta|=2$이므로 $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b=4\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-(a^2+4a+12)=4$

$\therefore\ a=-4,\ b=3\quad\therefore\ a+b=-1$

37. $x+3y=1,\ x\ge 0,\ y\ge -2$ 일 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+\dfrac{1}{m}$ 의 값은?

① 53 ② 58 ③ 63 ④ 68 ⑤ 72

해설

$x+3y=1$ 로부터 $x=1-3y \cdots\cdots\cdots$ ㉠

그런데 $x\ge 0$ 이므로

$x=1-3y\ge 0 \therefore\ y\le \dfrac{1}{3} \cdots\cdots\cdots$ ㉡

또 $y\ge -2 \cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $-2\le y\le \dfrac{1}{3}$

$x^2+y^2=k$ 라 하고 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\begin{aligned}(1-3y)^2+y^2 &= 1-6y+9y^2+y^2 \quad \therefore\ 10\left(y^2-\frac{6}{10}y\right)+1=k\\ &= 10y^2-6y+1=k\end{aligned}$$

$$\rightarrow\ 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{10}+1=k$$

$$\rightarrow\ 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10}=k$$

$$\begin{cases}\therefore\ y=\dfrac{3}{10} \text{ 일 때 } k=\dfrac{1}{10} \ :\ \text{최솟값 } m\\ y=-2 \text{ 일 때 } k=53 \ :\ \text{최댓값 } M\\ y=\dfrac{1}{3} \text{ 일 때 } k=\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

$\therefore\ M+\dfrac{1}{m}=53+10=63$

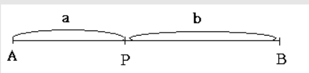
38. 거리가 $100\,\mathrm{m}$인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

① $20\,\mathrm{m}$ ② $30\,\mathrm{m}$ ③ $\dfrac{100}{3}\,\mathrm{m}$

④ $\dfrac{121}{4}\,\mathrm{m}$ ⑤ $\dfrac{147}{5}\,\mathrm{m}$

해설

갑의 속도를 α, 을의 속도를 β라 하자.



$a+b=100\cdots$ ①

$\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{b}{\beta}$, $\dfrac{b}{\alpha}=8$, $\dfrac{a}{\beta}=2$

정리하면 $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{8}\right)}=\dfrac{b}{\left(\dfrac{a}{2}\right)}$에서

$\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{b^2}{8}$, $4a^2=b^2$

$\therefore\ b=2a(\because a,\ b$는 양수$)$

①에 대입하면, $3a=100$ $a=\dfrac{100}{3}\,\mathrm{m}$

39. 두 함수 $y = \sqrt{x+4}$, $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $3 \le k < \dfrac{16}{3}$ ② $3 \le k < \dfrac{15}{4}$ ③ $4 \le k < \dfrac{17}{4}$

④ $4 \le k < \dfrac{16}{3}$ ⑤ $4 \le k < \dfrac{16}{5}$

해설

ⅰ) $y = x + k$ 가 점 $(-4, 0)$을 지날 때,

$0 = -4 + k \quad \therefore\ k = 4$

ⅱ) $y = x + k$ 와 $y = \sqrt{x+4}$ 가 접할 때

$x + k = \sqrt{x+4}$ 의 양변을 제곱하면

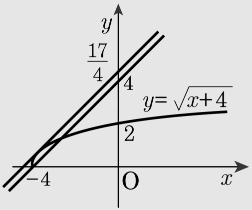
$x^2 + 2kx + k^2 = x + 4$

$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 4 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-4) = 0$

$-4k + 1 + 16 = 0 \quad \therefore\ k = \dfrac{17}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $y = \sqrt{x+k}$ 와 $y = x + k$가 두 점에서 만나려면 $4 \le k < \dfrac{17}{4}$ 이어야 한다.



40. $0 < a < 1$이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$일 때, $\dfrac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}$의 값은?

① $-\sqrt{15}$　　② $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　③ $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$

$\therefore a + a^{-1} = 8$

$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$

$0 < a < 1$이므로 $a - a^{-1} = a - \dfrac{1}{a} < 0$

$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$

$\therefore \dfrac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = -\dfrac{2\sqrt{15}}{8} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$