

1. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로

$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b\end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

2. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

3. 좌표평면 위의 점 A(3, -2), B(4, 5), C(-1, 3)을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 (x, y)라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

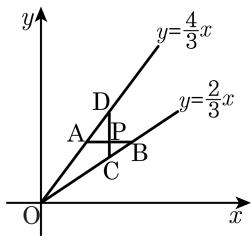
▷ 정답 : -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x, y)라고 하면
$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$
$$\therefore x = -2, y = -4$$

따라서 점 D의 좌표는 (-2, -4)

4. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 $y = \frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}{\overline{CP} \cdot \overline{DP}}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$
 ② $\frac{8}{9}$
 ③ $\frac{9}{8}$
 ④ $\frac{9}{2}$
 ⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

$$\text{직선 } y = \frac{4}{3}x \text{ 의 기울기에서 } \frac{\overline{DP}}{\overline{AP}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{직선 } y = \frac{2}{3}x \text{ 의 기울기에서 } \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}{\overline{CP} \cdot \overline{DP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

5. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

6. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ 을 변형하면

$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$

이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$ 가 되려면 $c = 10$

7. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$ 이 때, 이 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 이므로 $x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
 $\therefore a = 2, b = -6, c = 6$
따라서, 구하는 a, b, c 의 값의 합은 $2 + (-6) + 6 = 2$

8. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최소공배수가 $x^3 + 5x^2 - x - 5$ 이고 곱이 $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 6x - 5$ 일 때, 두 이차식은?
- ① $x^2 - 2x + 1, x^2 + 6x + 5$ ② $x^2 - 2x + 1, x^2 - 6x + 5$
③ $x^2 - 1, x^2 + 6x + 5$ ④ $x^2 - 1, x^2 - 6x + 5$
⑤ $x^2 - 1, x^2 - 6x - 5$

해설

두 다항식을 $A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라고 하면
최소공배수 $L = abG, AB = abG^2$ 이다.

$$L = x^3 + 5x^2 - x - 5 = x^2(x + 5) - (x + 5)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x + 5)$$

$$AB = x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 6x - 5$$

$$= (x + 1)^2(x - 1)(x + 5)$$

$$\therefore G = x + 1$$

따라서, 두 이차식은 $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1, (x + 1)(x + 5) = x^2 + 6x + 5$ 이다.

9. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $i^{3m} + i^{3n+1}$ 이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

i) $i^{3m} = (-i)^m \Rightarrow -i, -1, i, 1$
ii) $i^{3n+1} = (-i)^n \times i \Rightarrow 1, -i, -1, i$
 $\therefore$ i+ii를 더해서 나올 수 있는 수는
(0, 2, $1-i$, $1+i$, $-1-i$, $-1+i$, $2i$, $-2i$, -2) 의 9가지 이다.

10. 복소수 z 의 켈레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $z+3i = \overline{z-i}$ 를 만족하는 복소수 z 를 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$z = a + bi$ 라 할 때,

(좌변): $z + 3i = a + (b + 3)i$

(우변): $z - zi = (a + bi) - (a + bi)i$

$$= (a + b) + (b - a)i$$

$$\therefore \overline{z - zi} = (a + b) - (b - a)i$$

(좌변) = (우변) 이므로,

$$a + (b + 3)i = (a + b) + (a - b)i$$

$$\begin{cases} a + b = a \\ a - b = b + 3 \Rightarrow a = 3, b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore z = 3 + 0 \cdot i = 3$$

11. 두 실수 x, y 에 대하여 $\sqrt{x+3}\sqrt{y-3} = -\sqrt{(x+3)(y-3)}$ 이 성립할 때, $|x+3| - |y-3| + \sqrt{(x+y)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2x - 6$

② $-2x - 2y$

③ 0

④ $2y - 6$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\sqrt{x+3}\sqrt{y-3} = -\sqrt{(x+3)(y-3)} \text{ 에서}$$

$$x+3 \leq 0, y-3 \leq 0 \rightarrow x+y \leq 0$$

$$|x+3| - |y-3| + \sqrt{(x+y)^2}$$

$$= |x+3| - |y-3| + |x+y|$$

$$= -(x+3) + (y-3) - (x+y)$$

$$= -x-3+y-3-x-y$$

$$= -2x-6$$

12. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

- ① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
- ② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
- ③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

13. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, r 라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이
 α, β, r 이므로
 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$
양변에 $\sqrt{2}$ 를 대입하면
 $4\sqrt{2} - 6 + 6$
 $= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$
 $\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$

14. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5, 5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$$

$$a = -3$$

$$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$$

$$\therefore a + b = 4$$

15. x 에 대한 이차부등식 $x^2 - 10x - 24 \geq 0$,
 $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 존재하지 않도록
 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $-3 < a < 12$ ② $-3 < a < 8$ ③ $-3 < a < 4$
 ④ $-2 < a < 12$ ⑤ $-2 < a < 3$

해설

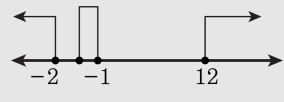
$$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 \geq 0 & \dots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq 0 & \dots (나) \end{cases}$$

(가)에서

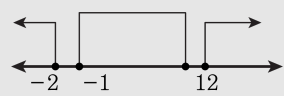
$$(x-12)(x+2) \geq 0$$

$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 12$ (가)와 (나)의

공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서



$$a^2 - a > -2 \dots (다)$$



$$a^2 - a < 12 \dots (라)$$

$$(다)에서 a^2 - a + 2 > 0, \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

$\therefore$ 모든 실수

$$(라)에서 a^2 - a - 12 < 0, (a+3) \times (a-4) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 4$$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$$-3 < a < 4$$

16. 점 A(0, 2), B(2, 0), C(3, 3) 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k + 1)x + (k - 1)y = 2(k - 1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

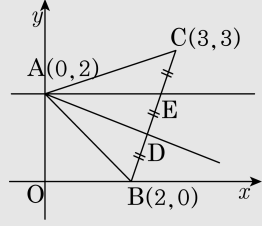
해설

$k(x + y - 2) + x - y + 2 = 0$ 은 k 에 관계없이

A(0, 2) 를 지나는 직선이므로

$\triangle ABC$ 를 그림과 같이

2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 1 : 2 또는 2 : 1 로 내분하는

점D, E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3}, 1\right)$, $E\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3} + 1 - 2\right) + \frac{7}{3} - 1 + 2 = 0$$

$k = -\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because k$ 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3} + 2 - 2\right) + \frac{8}{3} - 2 + 2 = 0$$

$$\therefore k = -1$$

17. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
 $(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y = x$ 에 대칭이동)
($a-2, a$) 와 원점 사이의 거리는
 $\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$
 $2a^2 - 4a + 4 = 4,$
 $\therefore a = 2$ ($\because a \neq 0$)
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a = 2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p, q) = (-2, 0)$
 $\therefore p^2 + q^2 = 4$

18. 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 관하여 점 $P(5, 3)$ 과 대칭인 점을 $Q(a, b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 7$

해설

$x - y + 2 = 0$ 에 관하여 점 $P(5, 3)$ 과 대칭인 점을 $Q(a, b)$ 라면

$\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+5}{2} - \frac{b+3}{2} + 2 = 0$$

$$\rightarrow a - b + 6 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

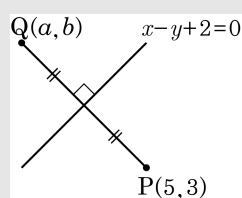
($\overline{PQ}$ 의 기울기) $\times 1 = -1$ 이므로

($\because \overline{PQ}$ 와 직선이 수직)

$$\frac{b-3}{a-5} \times 1 = -1 \rightarrow a + b - 8 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 1, b = 7$

$\therefore ab = 7$



19. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

$A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
 $A = ag, B = bg$ (a, b, g 는 다항식) ... ㉠로 쓸 수 있다.
이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
 $\therefore g$ 는 B, R 의 공약수이다. ... ㉡
역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
 $B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식) ... ㉢' 으로 쓸 수 있다.
이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
 $\therefore g'$ 은 A, B 의 공약수이다. ... ㉣'
이상에서 $(g \mid g \text{ 는 } A, B \text{ 의 공약수}) = (g' \mid g' \text{ 은 } B, R \text{ 의 공약수})$... ㉤
 $\therefore A, B$ 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. ... ㉥

위 과정에서 옳지 않은 것은?

- ① ㉠, ㉢'

② ㉣, ㉣'

③ ㉤
- ④ ㉥

⑤ 없다.

해설

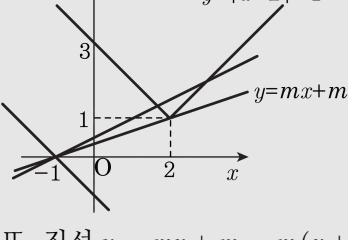
유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

20. 함수 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x - 2| = x - 2$ 이므로
 $y = x - 2 + 1 = x - 1$
 $x < 2$ 일 때, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = -x + 2 + 1 = -x + 3$
 따라서, $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx + m = m(x + 1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx + m$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m + m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx + m$ 이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행할 때, $m = -1$
 따라서, 직선 $y = mx + m$ 이 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프와 만나려면
 가울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

21. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$$

$$y^2 - y - 6 \leq 0, (y + 2)(y - 3) \leq 0$$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

22. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β 라 하면
네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$
 $\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

23. 연립방정식
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
의 해에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- I. 이 방정식은 a 의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
- II. $a = -2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
- III. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a 는 꼭 한 개 있다.
- IV. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

- ① II

② II, III

③ III, IV
- ④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

세 방정식을 더하면 $(a + 2)(x + y + z) = 3$
i) $a = -2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.
따라서 I , II 는 옳지 않다.
ii) $a \neq -2$ 이면 $x + y + z = \frac{3}{a + 2} \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에서 첫 번째 식을 빼면 $(a - 1)x = \frac{a - 1}{a + 2}$
따라서 $a = 1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,
 $a \neq 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 2}$
같은 방법으로 $y = \frac{1}{a + 2}, z = \frac{1}{a + 2}$
따라서 III, IV 는 옳다.

24. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$ 이 모든 실수 m 에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k 의 값의 범위를 정하면?

- ① $0 < k < 1$ ② $1 < k < 3$ ③ $-1 < k < 1$
④ $-1 < k < 2$ ⑤ $-1 < k < 3$

해설

$x^2 + (m-4)x + 3 - mk = 0$ 은
서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = (m-4)^2 - 12 + 4mk > 0$
이것을 정리하면
 $m^2 + 4(k-2)m + 4 > 0 \cdots (i)$
(i)는 모든 실수 m 에 대하여 성립해야 하므로
 $4(k-2)^2 - 4 < 0$
 $\therefore (k-1)(k-3) < 0$
 $\therefore 1 < k < 3$

25. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 근은 0 과 2 사이에 있을 때 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - a + b > 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) = b < 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(2) = 4 + 2a + b > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{3}$ 하면 $6 + 3b > 0$

$\therefore b > -2$

이것과 $\textcircled{2}$ 에서 $-2 < b < 0$

$\therefore b = -1$ ($\because b$ 는 정수)

이 값을 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에 대입하면

$1 - a - 1 > 0, 4 + 2a - 1 > 0$

$\therefore -\frac{3}{2} < a < 0$

$\therefore a = -1$ ($\because a$ 는 정수)

$\therefore a = -1, b = -1, a + b = -2$

26. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.

따라서 다른 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

원 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 와 $x^2 + y^2 = 5$ 이 직선 $y = ax + b$... ①에 대하여 대칭이므로

직선 ①은 점 $(-2, 1)$ 와 점 $(0, 0)$ 을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1 이다.

$$\frac{1}{2} = -a + b, \quad \frac{1}{-2} \times a = -1$$

$$\therefore a = 2, b = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

27. 자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^n(x - 2)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x - 3$ 으로 나눈 나머지는?

- ① $2 \cdot 3^n$ ② 3^n ③ 3^{n+1} ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ 3^{2n}

해설

$$\begin{aligned}x^n(x^2 + ax + b) &= (x - 2)^2 Q(x) + 2^n(x - 2) \\x^n(x^2 + ax + b) &= x^n(x - 2)(x + \alpha) \text{이라 하면} \\x^n(x - 2)(x + \alpha) &= (x - 2)\{(x - 2)Q(x) + 2^n\} \\\therefore x^n(x + \alpha) &= (x - 2)Q(x) + 2^n \\\text{양변에 } x = 2 \text{를 대입하면} \\2^n(2 + \alpha) &= 2^n \\2 + \alpha &= 1 \\\therefore \alpha &= -1 \\x^2 + ax + b &= (x - 1)(x - 2) \\\therefore a &= -3, b = 2 \\f(x) &= x^n(x^2 - 3x + 2) \text{이므로} \\f(3) &= 3^n(9 - 9 + 2) \\&= 2 \times 3^n\end{aligned}$$

28. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \\ f(1) &= 1 + a + b = 0 \\ \therefore b &= -(a+1) \\ \text{(ii) } f(x) &= x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x) \\ (x^4 - 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ \therefore x^3 + x^2 + x + 1 + a &= (x-1)Q(x) \\ x=1 \text{을 대입하면 } 4 + a &= 0 \quad \therefore a = -4 \\ b = -(a+1) \text{에서 } b &= 3 \\ \therefore a + b &= -1 \end{aligned}$$

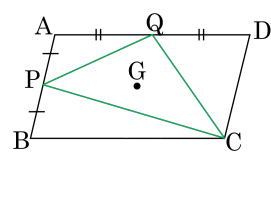
29. 좌표평면 위에 세 지점 P(1, 5), Q(-2, -4), R(5, 3)이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

- ① (0, -1)
- ② (0, 0)
- ③ (0, 1)
- ④ (1, 0)
- ⑤ (1, 1)

해설

A(a, b)라고 하면
 $(a - 1)^2 + (b - 5)^2 = \overline{AP}^2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $(a + 2)^2 + (b + 4)^2 = \overline{AQ}^2 \quad \dots \quad \textcircled{2}$
 $(a - 5)^2 + (b - 3)^2 = \overline{AR}^2 \quad \dots \quad \textcircled{3}$
 $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AR}^2$ 이므로
①, ② 연립하면 $a + 3b = 1$
①, ③ 연립하면 $2a - b = 2$
 $\therefore a = 1, b = 0$
 $\therefore (1, 0)$
 $\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

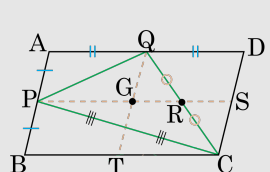
30. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 변 AB, AD의 중점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $A(a, b), C(c, d)$ 이고, 삼각형 PCQ의 무게중심 G의 좌표가 (4, 1)일 때, $a + b + c + d$ 의 값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

위 그림과 같이 $\overline{PG}$ 의 연장선이 $\overline{QC}, \overline{DC}$ 와 만나는 점을 각각 R, S라 하고



$\overline{QG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 T라 하면

$\overline{AD} \parallel \overline{PS}$ 이므로 점 S는 선분 DC의 중점이고

$\overline{QT} \parallel \overline{DC}$ 이므로 점 T는 선분 BC의 중점이다.

따라서 $\overline{PG} : \overline{GR} = 2 : 1$, $\overline{GR} : \overline{RS} = 1 : 1$ 이므로 점 G는 선분 PS의 중점이다.

따라서 점 G는 대각선 AC의 중점이고 선분 AC의 중점의 좌표

는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{a+c}{2} = 4, \frac{b+d}{2} = 1 \text{ 에서 } a+c = 8, b+d = 2$$

$$\therefore a+b+c+d = 8+2 = 10$$

31. 평면 위의 세 점 $A(-1, 2), B(4, 6), C(0, 1)$ 과 임의의 점 P 가 있을 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 을 최소로하는 점 P 의 좌표는 (a, b) 이고, 그 때의 최솟값은 k 이다. 이 때 $ab - k$ 의 값을 구하면?

① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

해설

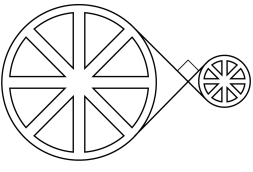
$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (a+1)^2 + (b-2)^2 + (a-4)^2 + (b-6)^2 + a^2 + (b-1)^2 \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 58 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) - 3 - 27 + 58 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 28 \\ &\therefore a=1, b=3 \text{ 일 때, 최솟값은 } 28 \\ &\therefore ab - k = -25 \end{aligned}$$

32. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?
- ① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초
 ④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
 내접해야 하므로,
 $AB = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$ 이고,
 2cm/s로 움직이므로,
 $\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ (초) 가 된다.

33. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a + b\pi$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구 하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서

$6 + 2 = 8$ 이다.

$\therefore$ 벨트의 길이는

$$2 \times 8 + \pi \times 2 \times 6 \times \frac{270}{360} + \pi \times 2 \times 2 \times \frac{270}{360}$$

$$= 16 + 12\pi$$

$$\therefore a + b = 28$$

