1. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　　② $-x+3$　　③ $x-3$

④ $-x-3$　　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

2. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

3. 좌표평면 위의 점 $A(3,-2)$, $B(4,5)$, $C(-1,3)$을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

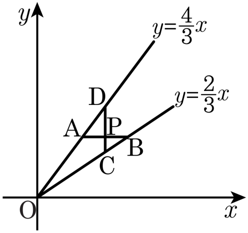
□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x,y)라고 하면

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$

$\therefore\ x=-2,\ y=-4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-2,-4)$

4. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

5. 세 점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ -3)$, $C(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{CP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow \quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

6. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$를 얻었다. 이 때, 상수 c의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$을 변형하면
$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 10$
이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$가 되려면 $c = 10$

7. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a,b,c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고
반지름의 길이가 2 이므로
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=4$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+6y+6=0$
$\therefore a=2,\ b=-6,\ c=6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2+(-6)+6=2$

8. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최소공배수가 x^3+5x^2-x-5 이고 곱이 $x^4+6x^3+4x^2-6x-5$ 일 때, 두 이차식은?

① $x^2-2x+1,\ x^2+6x+5$
② $x^2-2x+1,\ x^2-6x+5$
③ $x^2-1,\ x^2+6x+5$
④ $x^2-1,\ x^2-6x+5$
⑤ $x^2-1,\ x^2-6x-5$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ $(a,\ b$ 는 서로소$)$ 라고 하면 최소공배수 $L=abG$, $AB=abG^2$ 이다.

$L=x^3+5x^2-x-5=x^2(x+5)-(x+5)$
$\quad =(x+1)(x-1)(x+5)$

$AB=x^4+6x^3+4x^2-6x-5$
$\quad =(x+1)^2(x-1)(x+5)$

$\therefore\ G=x+1$

따라서, 두 이차식은 $(x+1)(x-1)=x^2-1$, $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$ 이다.

9. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $i^{3m}+i^{3n+1}$이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

i) $i^{3m}=(-i)^m \Rightarrow -i, -1, i, 1$

ii) $i^{3n+1}=(-i)^n \times i \Rightarrow 1, -i, -1, i$

$\therefore$ i+ ii 를 더해서 나올 수 있는 수는

$(0, 2, 1-i, 1+i, -1-i, -1+i, 2i, -2i, -2)$ 의 9가지 이다.

10. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $z+3i=\overline{z-zi}$ 를 만족하는 복소수 z 를 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$z=a+bi$ 라 할 때,

(좌변): $z+3i=a+(b+3)i$

(우변): $z-zi=(a+bi)-(a+bi)i$

$=(a+b)+(b-a)i$

$\therefore\ \overline{z-zi}=(a+b)-(b-a)i$

(좌변) $=$ (우변) 이므로,

$a+(b+3)i=(a+b)+(a-b)i$

$$\begin{cases} a+b=a \\ a-b=b+3 \end{cases} \Rightarrow a=3,\ b=0$$

$\therefore\ z=3+0\cdot i=3$

11. 두 실수 x, y 에 대하여 $\sqrt{x+3}\sqrt{y-3} = -\sqrt{(x+3)(y-3)}$ 이 성립할 때, $|x+3| - |y-3| + \sqrt{(x+y)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2x-6$ ② $-2x-2y$ ③ 0

④ $2y-6$ ⑤ $2x+2y$

해설

$\sqrt{x+3}\sqrt{y-3} = -\sqrt{(x+3)(y-3)}$ 에서

$x+3 \leq 0,\ y-3 \leq 0 \rightarrow x+y \leq 0$

$|x+3| - |y-3| + \sqrt{(x+y)^2}$

$= |x+3| - |y-3| + |x+y|$

$= -(x+3) + (y-3) - (x+y)$

$= -x-3+y-3-x-y$

$= -2x-6$

12. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

13. 방정식 $2x^3-3x^2+6=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ r$라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3-3x^2+6=0$의 세 근이

$\alpha,\ \beta,\ r$이므로

$2x^3-3x^2+6=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$

양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면

$4\sqrt{2}-6+6$

$=2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$

$\therefore\ (\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)=2\sqrt{2}$

14. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5$, $5\alpha = 5$

$\alpha = 1$

$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$

$a = -3$

$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$

$\therefore\ a + b = 4$

15. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$,
$(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$　　② $-3 < a < 8$　　③ $-3 < a < 4$
④ $-2 < a < 12$　　⑤ $-2 < a < 3$

해설

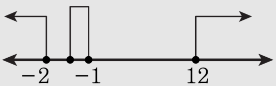
$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 & \cdots \text{(가)} \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq & \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서

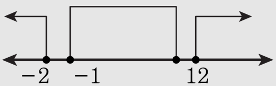
$(x-12)(x+2) \geq 0$

$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 12$ (가)와 (나)의

공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서



$a^2-a > -2 \cdots$(다)



$a^2-a < 12 \cdots$(라)

(다)에서$a^2-a+2>0$, $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$

$\therefore$모든 실수

(라)에서 $a^2-a-12<0$, $(a+3)\times(a-4)<0$

$\therefore -3 < a < 4$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$-3 < a < 4$

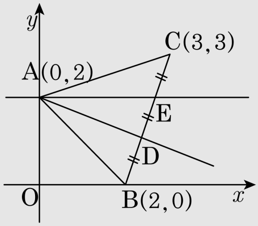
16. 점 $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
$A(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle ABC$ 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3},1\right)$, $E\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$$

$\therefore\ k=-1$

17. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

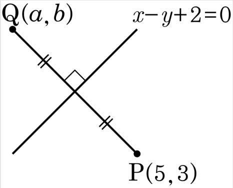
$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4,$
$\therefore a=2 \quad (\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

18. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $P(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $Q(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=7$

해설



$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $P(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $Q(a,\ b)$ 라면

$\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+5}{2}-\frac{b+3}{2}+2=0$$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$ ㉠

($\overline{PQ}$ 의 기울기)×1 = −1 이므로

($\because$ $\overline{PQ}$ 와 직선이 수직)

$\dfrac{b-3}{a-5}\times1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

19. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ (a, b, g 는 다항식)$\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore$ g 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식)$\cdots$㉠′ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore$ g' 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡′
> 이상에서 $\{g \mid g$ 는 A, B 의 공약수$\} = \{g' \mid g'$ 은 B, R 의 공약수$\}\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠′ ② ㉡, ㉡′ ③ ㉢
④ ㉣ ⑤ 없다.

해설

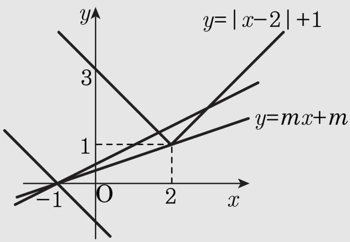
유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

20. 함수 $y = |x-2|+1$ 의 그래프가 직선 $y = mx+m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x-2| = x-2$ 이므로
$y = x-2+1 = x-1$
$x < 2$ 일 때, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = -x+2+1 = -x+3$
따라서, $y = |x-2|+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx+m = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx+m$ 이 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m+m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx+m$ 이 직선 $y = -x+3$ 과 평행할 때, $m = -1$
따라서, 직선 $y = mx+m$ 이 $y = |x-2|+1$ 의 그래프와 만나려면 기울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

21. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4x+y^2-y-2=0$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-\left(y^2-y-2\right)\geq 0$$

$y^2-y-6\leq 0$, $(y+2)(y-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq y\leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

22. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면

네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$

$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

23. 연립방정식 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 의 해에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

Ⅰ. 이 방정식은 a의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
Ⅱ. $a=-2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
Ⅲ. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a는 꼭 한 개 있다.
Ⅳ. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

① Ⅱ　② Ⅱ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

세 방정식을 더하면 $(a+2)(x+y+z)=3$
ⅰ) $a=-2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.
따라서 Ⅰ, Ⅱ 는 옳지 않다.
ⅱ) $a \neq -2$ 이면 $x+y+z=\dfrac{3}{a+2}$ ⋯⋯ ㉠
㉠에서 첫 번째 식을 빼면 $(a-1)x=\dfrac{a-1}{a+2}$
따라서 $a=1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,
$a \neq 1$ 이면 $x=\dfrac{1}{a+2}$
같은 방법으로 $y=\dfrac{1}{a+2}$, $z=\dfrac{1}{a+2}$
따라서 Ⅲ, Ⅳ 는 옳다.

24. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$이 모든 실수 m에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $0<k<1$　② $1<k<3$　③ $-1<k<1$

④ $-1<k<2$　⑤ $-1<k<3$

해설

$x^2+(m-4)x+3-mk=0$은

서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=(m-4)^2-12+4mk>0$

이것을 정리하면

$m^2+4(k-2)m+4>0 \cdots (\text{i})$

(i)는 모든 실수 m에 대하여 성립해야 하므로

$4(k-2)^2-4<0$

$\therefore\ (k-1)(k-3)<0$

$\therefore\ 1<k<3$

25. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because\ b$는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a$는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

26. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$ 이 직선 $y=ax+b$ $\cdots$① 에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2,1)$ 와 점 $(0,0)$을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$

$\therefore\ a=2, b=\frac{5}{2}$

따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

27. 자연수 n에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$ ② 3^n ③ 3^{n+1} ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ $3^2 n$

해설

$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$

$x^n\left(x^2 + ax + b\right) = x^n(x-2)(x+\alpha)$이라 하면

$x^n(x-2)(x+\alpha)$

$= (x-2)\left\{(x-2)Q(x) + 2^n\right\}$

$\therefore x^n(x+\alpha) = (x-2)Q(x) + 2^n$

양변에 $x = 2$를 대입하면

$2^n(2+\alpha) = 2^n$

$2 + a = 1$

$\therefore \alpha = -1$

$x^2 + ax + b = (x-1)(x-2)$

$\therefore\ a = -3, b = 2$

$f(x) = x^n\left(x^2 - 3x + 2\right)$이므로

$$f(3) = 3^n(9 - 9 + 2) = 2 \times 3^n$$

28. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0\ \ \therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

29. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1,5)$, $\mathrm{Q}(-2,-4)$, $\mathrm{R}(5,3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$ ② $(0,0)$ ③ $(0,1)$
④ $(1,0)$ ⑤ $(1,1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2 \quad \cdots$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2 \quad \cdots$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2 \quad \cdots$ ③

$\overline{\mathrm{AP^2}}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

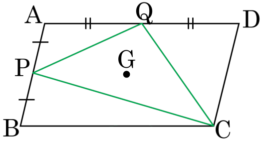
①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

∴ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

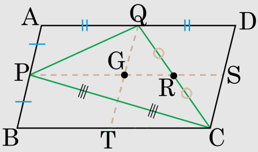
30. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 변 AB, AD의 중점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $A(a,b)$, $C(c,d)$이고, 삼각형 PCQ의 무게중심 G의 좌표가 $(4,1)$일 때, $a+b+c+d$의 값은?



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

위 그림과 같이 $\overline{PG}$의 연장선이 $\overline{QC}$, $\overline{DC}$와 만나는 점을 각각 R, S라 하고
$\overline{QG}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 T라 하면



$\overline{AD} // \overline{PS}$이므로 점 S는 선분 DC의 중점이고
$\overline{QT} // \overline{DC}$이므로 점 T는 선분 BC의 중점이다.
따라서 $\overline{PG} : \overline{GR} = 2 : 1$, $\overline{GR} : \overline{RS} = 1 : 1$이므로 점 G는 선분 PS의 중점이다.
따라서 점 G는 대각선 AC의 중점이고 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$이므로

$\frac{a+c}{2} = 4$, $\frac{b+d}{2} = 1$에서 $a+c=8$, $b+d=2$

$\therefore\ a+b+c+d = 8+2 = 10$

31. 평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 6)$, $C(0,\ 1)$과 임의의 점 P가 있을 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$을 최소로하는 점 P 의 좌표는 (a, b)이고, 그 때의 최솟값은 k이다. 이 때 $ab-k$의 값을 구하면?

① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

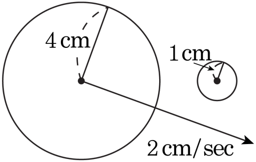
해설

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$$
$$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$$
$$=3(a^2-2a+1)+3(b^2-6b+9)-3-27+58$$
$$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28$$

$\therefore\ a=1,\ \ b=3$일 때, 최솟값은 28

$\therefore\ ab-k=-25$

32. 반지름의 길이가 1 cm 인 원에 반지름의 길이가 4 cm 인 원이 초속 2 cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2 cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1 cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4 cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

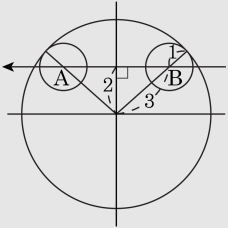
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는 내접해야 하므로,

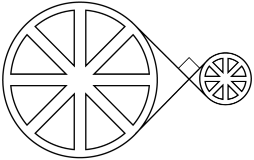
$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ 이고,

2 cm/s 로 움직이므로,

$\dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$(초) 가 된다.



33. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

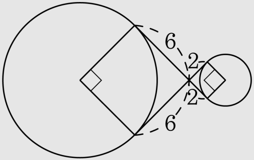


▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.



$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\dfrac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\dfrac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$