1. -8의 세제곱근 중에서 실수를 a, 16의 네제곱근 중에서 실수를 b라 할 때, $a+b^2$의 값을 구하면?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$a=-2$
$b=2\ or-2$
$a+b^2=-2+4=2$

2. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2,\ 2$

해설

16의 네제곱근은
$x^4 = 16$를 만족하는 x의 값이므로
$x^4 - 16 = 0$에서
$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
$\therefore x = -2,\ 2,\ 2i,\ -2i$
따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은
$-2,\ 2$

3. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$를 간단히 하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

4. 다음 식의 값은?

$$2^8 \times 3^5 \times 6^{-6}$$

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$$\begin{aligned} 2^8 \times 3^5 \times 6^{-6} &= 2^8 \times 3^5 \times (2 \times 3)^{-6} \\ &= 2^8 \times 3^5 \times 2^{-6} \times 3^{-6} \\ &= 2^{8+(-6)} \times 3^{5+(-6)} \\ &= 2^2 \times 3^{-1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

5. $\log_8 0.25 = x$를 만족하는 x의 값은?

① 1　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{2}{3}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

$\log_8 0.25 = x$에서 $8^x = 0.25$

$(2^3)^x = \frac{1}{4}$ $\therefore\ 2^{3x} = 2^{-2}$

$\therefore\ 3x = -2$

$\therefore\ x = -\frac{2}{3}$

6. $\log_2(x-5)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 2$ ② $x < 2$ ③ $x > 5$ ④ $x < 5$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$x-5>0$ 로부터 $x>5$

7. $\log_4(x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 4$ ② $x < 4$ ③ $x < 6$ ④ $x > 8$ ⑤ $x \geq 8$

해설

$x - 8 > 0$ 로부터 $x > 8$

8. $\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2}$ 의 값을 구하면?

① 0　② −1　③ 1　④ −2　⑤ 2

해설

로그의 성질에 의하여

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ 이므로

$$\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 \left(6 \div \frac{3}{2}\right) = \log_2 \left(6 \times \frac{2}{3}\right) = 2$$

9. $\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 일 때, $\log_{ab} b$ 의 값은?

① 2　　② $\frac{8}{5}$　　③ $\frac{5}{4}$　　④ 1　　⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 에서

$\dfrac{\log \sqrt{3}}{\log a} = \dfrac{\log 9}{\log b}$, $\dfrac{\frac{1}{2}\log 3}{\log a} = \dfrac{2\log 3}{\log b}$

$\dfrac{\log b}{\log a} = 4$

즉, $\log_a b = 4$

$\therefore\ \log_{\sqrt{ab}} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}}$

$= \dfrac{\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a ab} = \dfrac{2\log_a b}{1+\log_a b} = \dfrac{8}{5}$

10. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$의 값은?

① $-\frac{1}{12}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{12}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$$\log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12}$$
$$= \frac{5}{12}$$

11. $a > 0$일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$을 간단히 하면?

① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt[4]{a^3}$ ④ $\sqrt[4]{a^3}$ ⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

12. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 4017

해설

(준식)$= |-2014| + (-2015) = -1$

13. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$=\sqrt{a\cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$

$n=7,\ m=8$

$8-7=1$

14. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{6}=2^a\times3^b$ 일 때 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

해설

$2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\times(2\times3)^{\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{7}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}$

$a=\frac{7}{6},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{7+3}{6}=\frac{5}{3}$

15. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

해설

$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$

$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$

$20 = k + 3$

$k = 17$

16. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
$k = 5$

17. $x > y > 0$일 때, $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{y}{x}}$　　② $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$　　③ 1

④ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$　　⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$

18. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16　　② 64　　③ 256

④ 1024　　⑤ 65536

해설

$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$

$2^{10} = 1024,\ 2^6 = 64$ 이므로

$\therefore\ 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$

19. $\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$ 에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

20. $5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 2+\log_5 3^3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 \frac{2\times 3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9$

21. $3^{\log_3 \frac{4}{7}+\log_3 7}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$3^{\log_3 \frac{4}{7}+\log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$

22. $\log_{10} 5 = a,\ \log_{10} 7 = b$라 할 때, 다음 중 $pa + qb + r$의 꼴로 나타낼 수 없는 것은? (단, p, q, r은 유리수)

① $\log_{10} 20$　② $\log_{10} 3.5$　③ $\log_{10} 75$

④ $\log_{10} \sqrt{14}$　⑤ 1

해설

$\log_{10} 75 = \log_{10} 25 \times 3 = \log_{10} 5^2 + \log_{10} 3$

$= 2 \cdot a + 0 \cdot b + \log_{10} 3$

$\log_{10} 3$은 유리수가 아니므로

$\log_{10} 75$는 $pa + qb + r(p,\ q,\ r$은유리수) 의 꼴로 나타낼 수 없다.

23. $\log_3 2 = a,\ \log_3 5 = b$라고 할 때, $\log_8 125$를 $a,\ b$로 나타내면?

① $1-2b$　② $2b-a$　③ $a-b$

④ $\frac{b}{a}$　⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$

$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$

$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$

24. $\log_3 2 = a$일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{2a+1}$ ② $\dfrac{4}{2a+1}$ ③ $\dfrac{2}{a+1}$
④ $\dfrac{2}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{4}{a+2}$

해설

$\log_{\sqrt{12}} 9$

$= \dfrac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}\log_3(2^2 \cdot 3)}$

$= \dfrac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \dfrac{4}{2(a+1)} = \dfrac{2}{a+1}$

25. a, x, y가 양의 실수이고 $A = \log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \frac{y^2}{x^3}$ 일 때, $3A + 2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$ ② $\log_a \frac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \frac{1}{xy}$

④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

해설

$3A + 2B$

$= 3(2\log_a x - 3\log_a y) + 2(2\log_a y - 3\log_a x)$

$= -5\log_a y = \log_a \frac{1}{y^5}$

26. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$

$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$

27. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(20^x) = \dfrac{1}{x} - \log_3 5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ $2\log_3 2$
④ $2\log 35$ ⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$20^x = 3$ 이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

28. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$

29. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1}$

$= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

30. $(7^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$ 의 값은?

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

해설

$(7^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$

$\left\{(7^{\frac{1}{4}})^2-(5^{\frac{1}{4}})^2\right\}(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})$

$=(7^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}})=(7^{\frac{1}{2}})^2-(5^{\frac{1}{2}})^2$

$=7-5=2$

31. $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$

$x - 2 + x^{-1} = 4$

$x + x^{-1} = 6$

$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$

$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$

32. $p \times 3^x = 1,\ q \times 3^y = 1$일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$을 $p,\ q$로 바르게 나타낸 것은?

① $2pq$　② $8pq$　③ p^2q　④ p^4q^2　⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x > 0,\ 3^y > 0$이므로 $p > 0,\ q > 0$이다.

$3^x = \frac{1}{p},\ 3^y = \frac{1}{q}$

$\therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$

$= (3^x)^{-4}(3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4}\left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4q^2$

33. 실수 x, y에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$57^x = 27 = 3^3$에서 $57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \cdots$ ㉠

$513^y = 81 = 3^4$에서 $513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \cdots$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면

$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$

$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$

34. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a > 0,\ a \neq 1, b > 0, c > 0$)

보기

㉠ $\log_a (b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

㉢ $\log_a b^c = (\log_a b)^c$

㉣ $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \log_a b$

① ㉠, ㉣　② ㉡, ㉢　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\log_a (b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$(거짓)

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$(참)

㉢ $\log_a b^c = c \log_a b \neq (\log_a b)^c$(거짓)

㉣ $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \log_a b$(참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

35. $\log_5 250 = n + \alpha$(n은 정수, $0 \leq a < 1$)라고 할 때, $n \times 25^{\alpha}$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로
$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$
$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고
소수부분은 $\alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \frac{250}{125} = \log_5 2$
따라서 $25^{\alpha} = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^{α} 의 값과 정수부분 n 의 곱은 $3 \times 4 = 12$ 이다.

36. $\log_2 14$ 의 소수부분을 $a(0 \le a < 1)$ 이라 할 때, 2^{a+2} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$2 < \log_2 n < 3$

정수 부분 : $1 + 2 = 3$

소수 부분 : $\log_2 14 - 3 = \log_2 \frac{14}{8} = a$

$a + 2 = a + \log_2 4$

$= \log_2 \frac{14}{8} \cdot 4 = \log_2 \frac{14}{2} = \log_2 7$

$2^{a+2} = 2^{\log_2 7} = 7$

37. $2^x = a,\ 2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3b^2$ 을 $x,\ y$ 로 나타내면?

① $\dfrac{3x+2y}{1+x+y}$ ② $\dfrac{2x+3y}{2+x+y}$ ③ $\dfrac{2+x+y}{3x+2y}$
④ $\dfrac{x^2y^2}{4xy}$ ⑤ $\dfrac{4xy}{x^3y^2}$

해설

$2^x = a,\ 2^y = b$ 이므로
$\log_{2ab} a^3b^3 = \log_{2\cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2$
$= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y}$
$= \dfrac{3x+2y}{1+x+y} \log_2 2 = \dfrac{3x+2y}{1+x+y}$

38. $A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$, $B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$ 일 때, AB의 값은?

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$

$=(\log_3 3^3)(\log_4 3^3+\log_{2^{-1}}3^{-1})$

$=(2\log_3 3^3)(\frac{2}{2}\log_2 3+\frac{-1}{-1}\log_2 3)$

$=2(\log_2 3+\log_2 3)=2\cdot\log_2 3=4\log_2 3$

$B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$

$=(\log_{3^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^2}5)(\log_5 2^6+\log_{5^2}2^3)$

$=(2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5)(6\log_5 2+\frac{3}{2}\log_5 2)$

$=\frac{5}{2}\log_3 5\cdot\frac{15}{2}\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}5}$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{75}{4}\log_3 2$

$\therefore\ AB=4\log_2 3\cdot\frac{75}{4}\log_3 2$

$=4\cdot\frac{75}{4}\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=75$

39. $a = \log_3 \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 일 때, $3^a - 3^{-a}$ 의 값은?

① $-2\sqrt{2}$　② -2　③ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

④ $\dfrac{3\sqrt{5}-5}{4}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}+5}{4}$

해설

$a = \log_3 \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 에서

$3^a = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$

$$3^{-a} = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^{-1} = (\sqrt{5}-1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$3^a - 3^{-a} = \sqrt{5}-1-\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{4\sqrt{5}-4-\sqrt{5}-1}{4} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

40. 방정식 $2x^2-8x-1=0$의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① -2　② -8　③ -12　④ -26　⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\log_{10} a+\log_{10} b=4$,

$\log_{10} a \cdot \log_{10} b=-\frac{1}{2}$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

$=\frac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b}$

$=\frac{16+1}{-\frac{1}{2}}=-34$

41. $A = \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$에 대하여 $[2A]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} &= \sqrt{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

같은 방법으로

$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$A = \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$\therefore 2A = \sqrt{24}$

그런데 $4 < 2A < 5$이므로

$[2A] = 4$

42. $A = \sqrt[3]{9},\ B = \sqrt{27},\ C = \sqrt[4]{81}$ 일 때, A, B, C 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?

① $A < C < B$ ② $C < A < B$ ③ $B < A < C$
④ $B < C < A$ ⑤ $A < B < C$

해설

$\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[4]{81} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$
$\therefore A < C < B$

43. $\dfrac{a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6}{a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9}}$ 을 간단히 하면?

① a^8 ② a^9 ③ a^{10} ④ a^{11} ⑤ a^{12}

해설

분모 분자에 각각 a^{10} 을 곱하면

$$\frac{a^{10}(a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a^{10}(a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9})}$$

$$= \frac{a^{10}(a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a} = a^{10}$$

44. $2^x + 2^y = 3 - p,\ x + y = 0$일 때 $(1 + p \cdot 2^x + 2^{2x})(1 + p \cdot 2^y + 2^{2y})$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$x + y = 0$에서 $y = -x,\ x = -y$이므로
$2^x + 2^y = 2^x + 2^{-x} = 2^{-y} + 2^y = 3 - p$
$\therefore (1 + p \cdot 2^x + 2^{2x})(1 + p \cdot 2^y + 2^{2y})$
$= 2^x(2^{-x} + p + 2^x) \times 2^y(2^{-y} + p + 2^y)$
$= 2^x(3 - p + p) \times 2^y(3 - p + p)$
$= 3^2 \times 2^{x+y} = 3^2 \times 2^0 = 9$

45. $2^x = \sqrt{3}+2$일 때, $\dfrac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{14}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{12}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{14}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

해설

$$4^x = (2^x)^2 = (\sqrt{3}+2)^2 = 7+4\sqrt{3}$$

$$4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = 7-4\sqrt{3}$$

$$\frac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}} = \frac{(7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})} = \frac{14}{8\sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

46. $2^x = \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$일 때, $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$의 값을 $a+b\sqrt{2}$($a,\ b$는 유리수)로 나타낼 수 있다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$2^x = \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$임을 이용하여 2^{2x}을 구할 수 있다.
$2^x = \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면
$2^{2x} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$
또, $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$의 분모와 분자에 각각 2^x을 곱하면

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x-2^{-x}} = \frac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}-1} = \frac{(2^{2x})^2+\frac{1}{2^{2x}}}{2^{2x}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{(\sqrt{2}+1)-1} = \frac{3+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}$$

$\therefore a=3,\ b=1$
$\therefore a^2+b^2=10$

47. 두 양수 a, b에 대하여 $ab = 8$, $a^x = b^y = 16$을 만족할 때 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$a^x = 16$에서 $a = 16^{\frac{1}{x}} \cdots$ ㉠
$b^y = 16$에서 $b = 16^{\frac{1}{y}} \cdots$ ㉡
㉠ × ㉡을 하면
$ab = 16^{\frac{1}{x}} \times 16^{\frac{1}{y}} = 16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
$ab = 8$이므로 $2^3 = (2^4)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
따라서 $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3$이므로 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$

48. $x^2-6x-3=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $2^{\frac{1}{\alpha^2-3}} \times 2^{\frac{1}{\beta^2-3}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ② $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ ③ $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ 5

해설

α, β가 $x^2-6x-3=0$의 근이므로

$a^2-6\alpha-3=0,\ \beta^2-6\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2-3=6\alpha,\ \beta^2-3=6\beta$

$$\begin{aligned}\therefore 2^{\frac{1}{\alpha^2-3}} \times 2^{\frac{1}{\beta^2-3}} &= 2^{\frac{1}{6\alpha}} \times 2^{\frac{1}{6\beta}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)} \\ &= 2^{\frac{1}{6}\times\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}\end{aligned}$$

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=-3$ 이므로

$2^{\frac{1}{6}\times\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

49. $x = \log_4 28$에 가장 가까운 정수를 y라 할 때, $2^x + 2^y$의 값은?

① 32　　② $\sqrt{30}$　　③ $4 + 2\sqrt{7}$

④ 24　　⑤ 28

해설

$x = \log_4 28 = \log_4 4 \cdot 7 = 1 + \log_4 7$

$\log_4 4 < \log_4 7 < \log_4 16$

$y = 1 + 1 = 2$

$$\begin{aligned} 2^x + 2^y &= 2^{\log_4 28} + 2^2 = 28^{\log_4 2} + 4 \\ &= 28^{\frac{1}{2}} + 4 \\ &= 2\sqrt{7} + 4 \end{aligned}$$

50. 다음 세 실수 $A = \log_2 12 - \log_2 3$, $B = \dfrac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4}$, $C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$
④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

로그의 성질을 이용하여 세 수를 간단히 한 후 비교한다.

$$A = \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

$$B = \frac{2\log_3 3\sqrt{3}}{\log_2 4} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}\log_3 3}{2\log_2 2} = \frac{3}{2}$$

$$C = 6^{2\log_6 \sqrt{3}} = 6^{\log_6 3} = 3^{\log_6 6} = 3$$

$\therefore B < A < C$