1. 다음은 n 이 자연수일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때,
 (좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
 이므로 주어진 등식은 성립한다.
 (ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
 위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $2k^2 + 7k + 4, 2k + 2$ ② $2k^2 + 7k + 5, 2k + 2$
 ③ $2k^2 + 7k + 5, 2k + 3$ ④ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 2$
 ⑤ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 3$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
 위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2 + 7k + 6})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

2. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{3} =$ (우변) 이므로 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} +$ ㉠ $=$ ㉡
즉, $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

- ① $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+1}{2k+3}$ ② $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$ ④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+3}{2k+3}$

해설

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \text{의 양변에}$$

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \text{을 더하면}$$

$$\begin{aligned} \text{(우변)} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

3. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 1 \cdot 2 = 2$, (우변) $= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$ 이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을 더하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$ $= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$ 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k
 ② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$
 ③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k
 ④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$
 ⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$ 이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$ 을 더하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$ $= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$ 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

4. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$
 $= (2n)(2n-1) \dots (n+2)(n+1) \dots \textcircled{\ominus}$
 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = (우변) = 2
 (ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{\ominus}$ 이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \dots \textcircled{\ominus}$
 $\textcircled{\ominus}$ 의 양변에 $\textcircled{\text{가}}$ 를 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot \textcircled{\text{나}}$
 $= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \cdot \textcircled{\text{가}}$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k) \dots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{\ominus}$ 이 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{\ominus}$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$ 라 할
 때, $\frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{1024}$ ② $\frac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$
 (ii) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$ 을 대입하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \dots \textcircled{\ominus}$
 $\textcircled{\ominus}$ 의 양변에 $2(2k+1)$ 을 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot \textcircled{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$
 $= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \cdot \textcircled{2(2k+1)}$
 $= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(2k+2)(2k+1)$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \dots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{\ominus}$ 이 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{\ominus}$ 이 성립한다.
 즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$
 $\therefore \frac{g(k)}{f(k)} = 2^k$
 $\therefore \frac{g(10)}{f(10)} = 1024$

5. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 4, (우변) = $2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$
② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$
③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$
④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$
⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
 $4^{k+1} \leq \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

6. 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $\square$ 안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

$6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수이다. $\dots\dots\textcircled{1}$

(i) $n = 1$ 일 때, $6 - 5 - 1 = 0$ 이므로 $\square$ 의 배수이다.
따라서 $n = 1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$ 이 25의 배수이면

$6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \square(6^k - 5k - 1) + 25k$ 는 $\square$ 의 배수이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$$25 + 6 + 25 = 56$$

8. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, $4 > 2 + 1$ 이므로 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때,
 $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1 \dots \textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{1}$ 의 양변에 2를 곱하면
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$
이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{(나)} = k^2 - k - 1$
 $k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{(다)} 0$ 이므로
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{(나)}$
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{(나)}$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$
② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$
③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2) + 1\}$, (다) : $>$
④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2) + 1\}$, (다) : $<$
⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2) + 1\}$, (다) : $>$

해설

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때,
 $2^{k+1} > \boxed{k(k+1)} + 1 \dots \textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{1}$ 의 양변에 2를 곱하면
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$
이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{\{(k+1)(k+2) + 1\}} = k^2 - k - 1$
 $k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{>} 0$ 이므로
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{\{(k+1)(k+2) + 1\}}$
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{\{(k+1)(k+2) + 1\}}$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.

9. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때,
 (좌변) $= \frac{1}{(가)} + \frac{1}{(나)} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$
 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
 (ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$
 양변에 $\frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$ 을 더하면
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$
 $> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+(다)} + \frac{1}{2k+(라)}$
 $= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+(다)} - \frac{1}{2k+(라)} \right)$
 $= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+(다))} > \frac{13}{24}$
 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

- ① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

해설

(i) $n = 2$ 일 때,
 (좌변) $= \frac{1}{\boxed{3}} + \frac{1}{\boxed{4}} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$
 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
 (ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$
 양변에 $\frac{1}{2k+\boxed{1}} + \frac{1}{2k+\boxed{2}}$ 을 더하면
 $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+\boxed{1}} + \frac{1}{2k+\boxed{2}}$
 $> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+\boxed{1}} + \frac{1}{2k+\boxed{2}}$
 $= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+\boxed{1}} - \frac{1}{2k+\boxed{2}} \right)$
 $= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+\boxed{1})} > \frac{13}{24}$
 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore$ (가)+(나)+(다)+(라) $= 3 + 4 + 1 + 2 = 10$