1. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$

② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$

③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$

④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$

⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

2. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변)이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$$
> 위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$$
> 즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> 따라서, (i),(ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)},\ \frac{2k+1}{2k+3}$　② $\frac{1}{2k(2k+2)},\ \frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+1}{2k+3}$　④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+3}{2k+3}$

3. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
$= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=$ (우변)$=2$

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{\text{(나)}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{\text{(가)}}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

5. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= 2^{1-1}(1+3) = 4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
$= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
$= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

6. 모든 자연수 n에 대하여 $6^n - 5n - 1$은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\square$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

$6^n - 5n - 1$은 25의 배수이다. $\cdots\cdots$ ㉠ (i) $n = 1$일 때, $6 - 5 - 1 = 0$이므로 $\square$의 배수이다. 따라서 $n = 1$일 때, ㉠이 성립한다. (ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$이 25의 배수이면 $6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \square(6^k - 5k - 1) + 25k$는 $\square$의 배수이므로 $n = k + 1$일 때에도 ㉠이 성립한다. 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답: ____________

7. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$= \dfrac{5+3}{2} = 4$, (우변)$= 4^1 = 1$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\dfrac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
$4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$
이므로
$\dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2}$
$= \dfrac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$
따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k,\ 5^k-3^k$
② $4^{k+1},\ 5^k-3^k$
③ $4^k,\ 5^k+3^k$
④ $4^{k+1},\ 5^k+3^k$
⑤ $4^{k+1},\ 5^{k+1}-3^{k+1}$

8. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, $4>2+1$이므로 성립한다.
(ii) $n=k(k \ge 2)$일 때,
$2^{k+1} > \boxed{\text{(가)}} + 1 \cdots$ ㉠이 성립한다고 가정하자. ㉠의 양변에 2를 곱하면
$2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$
이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{\text{(나)}} = k^2-k-1$
$k \ge 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{\text{(다)}} 0$이므로
$2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{\text{(나)}}$
$\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{\text{(나)}}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

9. 다음은 $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때,
>
> $$(\text{좌변})=\frac{1}{(\text{가})}+\frac{1}{(\text{나})}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$$
>
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
>
> (ii) $n=k(k \ge 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
>
> $$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$
>
> $$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}$$
>
> 양변에 $\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$을 더하면
>
> $$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$$
>
> $$>\frac{13}{24}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+(\text{다})}+\frac{1}{2k+(\text{라})}$$
>
> $$=\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+(\text{다})}-\frac{1}{2k+(\text{라})}\right)$$
>
> $$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+(\text{다}))}>\frac{13}{24}$$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19