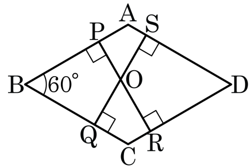
1. 다음 그림과 같이 $\angle ABC = 60°$ 인 마름모 ABCD 의 내부에 임의의 한 점 O 가 있다. 점 O 에서 마름모 ABCD 의 각 변 또는 그의 연장선 위에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S 라 할 때, 다음 중 $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS}$ 와 같은 것은?

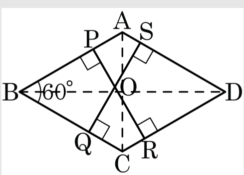


① $\overline{AC}$ ② $\overline{BD}$ ③ $\overline{OA} + \overline{OC}$

④ $\overline{OB} + \overline{OD}$ ⑤ $2\overline{AB}$

해설

마름모 ABCD 의 한 변의 길이를 a 라 하면



$\square ABCD = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle OAD$
$= \frac{a}{2} \times \overline{OP} + \frac{a}{2} \times \overline{OQ} + \frac{a}{2} \times \overline{OR} + \frac{a}{2} \times \overline{OS}$

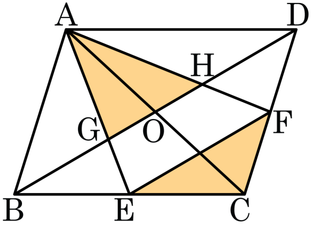
$= \frac{a}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS}) \quad \cdots$ ㉠

또한 $\overline{AC}$ 를 그으면 $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\angle B = 60$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다. 즉, $\overline{AC} = a$ 이므로

$\square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \frac{a}{2} \times \overline{BD} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{a}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS}) = \frac{a}{2} \times \overline{BD}$ $\therefore$ $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS} = \overline{BD}$

2. 평행사변형 ABCD 에서 점 E, F 는 각각 변 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 의 중점이고 점 G, H 는 각각 대각선 $\overline{BD}$ 와 $\overline{AE}, \overline{AF}$ 의 교점이다. $\triangle AGH$ 의 넓이가 10 일 때, $\triangle CFE$ 의 넓이를 구하면?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 7.5 ⑤ 10

해설

점 G, H 는 각각 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ACD$ 의 무게중심이므로

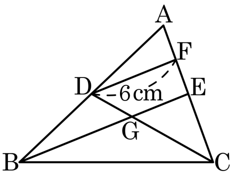
$\triangle AGH = \frac{1}{3}\triangle ABD$

$\triangle ABD = 10$ 이므로

$\triangle ABD = 30$ 이다.

따라서 $\triangle CFE = \frac{1}{4}\triangle BCD = \frac{1}{4}\triangle ABD = 7.5$ 이다.

3. 다음 그림에서 점 G 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이고 점 F 는 $\overline{AE}$의 중점이다. $\overline{DF} = 6\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{GE}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 4 cm

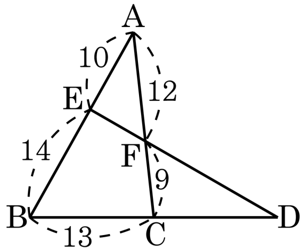
해설

$\triangle ABE$ 에서 점 D, F 는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ 의 중점이므로

$\overline{BE} = 2\overline{DF} = 12\ (\text{cm})$

$\overline{BE} : \overline{GE} = 3 : 1$이므로 $\overline{GE} = 12 \times \dfrac{1}{3} = 4\ (\text{cm})$

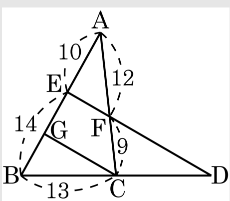
4. 다음 그림에서 $\overline{CD}$ 의 길이는?



① 12　　② 13　　③ 14　　④ 15　　⑤ 16

해설

$\overline{ED} \mathbin{/\!/} \overline{GC}$ 인 선분 GC 를 그으면



$\overline{AE} : \overline{EG} = \overline{AF} : \overline{FC}$

$10 : \overline{EG} = 12 : 9$

$\therefore\ \overline{EG} = \dfrac{15}{2}$

$\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{BG} : \overline{GE}$,

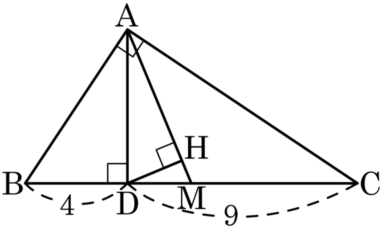
$13 : \overline{CD} = \left(14 - \dfrac{15}{2}\right) : \dfrac{15}{2}$

$13 : \overline{CD} = \dfrac{13}{2} : \dfrac{15}{2}$

$13 : \overline{CD} = 13 : 15$

$\therefore\ \overline{CD} = 15$

5. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BM} = \overline{CM}$ 일 때, $\overline{DH}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{30}{13}$

해설

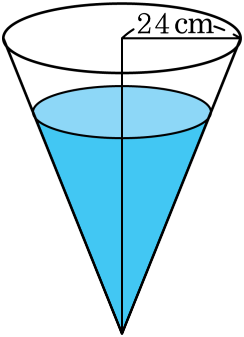
$\triangle ADB$ 와 $\triangle CDA$ 는 닮음이므로 $\overline{AD}^2 = 9 \times 4 = 36$ 이다.
따라서 $\overline{AD} = 6$ 이다.

점 M 이 외심이므로 $\overline{AM} = \dfrac{13}{2}$, $\overline{MD} = \dfrac{5}{2}$ 이다.

$\triangle AMD$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times \overline{MD} \times \overline{AD} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{2} \times 6 = \dfrac{15}{2}$ 이다.

따라서 $\dfrac{15}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{13}{2} \times \overline{DH}$, $\quad \therefore \overline{DH} = \dfrac{30}{13}$

6. 다음 그림과 같은 원뿔 모양의 그릇에 한 시간 동안 물을 받았더니 전체 높이의 $\frac{3}{4}$ 만큼 물이 찼다. 이때, 수면의 지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 36 cm

해설

그릇 전체와 물이 채워진 부분까지의 닮음비가 4 : 3 이므로
수면의 반지름의 길이를 $x$cm 라고 하면 $4 : 3 = 24 : x$, $x = 18$
따라서 지름의 길이는 36cm 이다.

7. 다음 도형 중 항상 닮은 도형인 것을 모두 고르면?

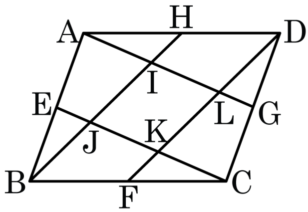
① 두 원기둥　② 두 원뿔　③ 두 구

④ 두 사각기둥　⑤ 두 정육면체

해설

두 구와 두 정육면체는 항상 닮음이다.

8. 다음 그림에서 네 변의 길이가 같은 평행사변형 ABCD 의 넓이가 40 이고, 점 E, F, G, H 는 각 변의 중점일 때, 사각형 IJKL 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\triangle$ABI 에서 삼각형의 중점연결 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{EJ}} = 2 : 1$

$\triangle$ADL 에서 삼각형의 중점연결 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{IL}} = 1 : 1$

$\overline{\mathrm{IL}} = \overline{\mathrm{JK}} = \overline{\mathrm{KC}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{EJ}} : \overline{\mathrm{JK}} : \overline{\mathrm{KC}} = 1 : 2 : 2$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCJ} &= \frac{4}{5}\triangle\mathrm{EBC}\\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}\square\mathrm{ABCD}\\ &= \frac{1}{5}\square\mathrm{ABCD}\\ &= 8\end{aligned}$$

사각형ABCD 의 네 변의 길이가 같으므로

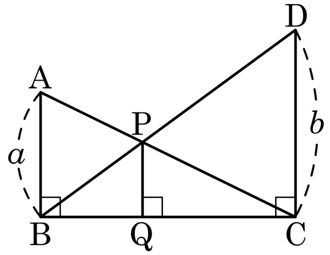
$\square$IJKL

$= \square\mathrm{ABCD} - (\triangle\mathrm{ABI} + \triangle\mathrm{ADL} + \triangle\mathrm{DCK} + \triangle\mathrm{CBJ})$

$= \square\mathrm{ABCD} - 4\triangle\mathrm{BCJ}$

$= 40 - 4 \times 8 = 8$

9. 다음 그림에서 $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$, $\overline{DC}$가 각각 $\overline{BC}$와 수직으로 만나고, $\overline{AB}=a$, $\overline{DC}=b$일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 a, b에 관한 식으로 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{ab}$ ② $\dfrac{ab}{b-a}$ ③ $\dfrac{b-a}{a+b}$ ④ $\dfrac{2a}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{ab}{a+b}$

해설

$\triangle ABP \backsim \triangle CDP$이므로 $\overline{BP}:\overline{DP}=\overline{AB}:\overline{CD}=a:b$

$\therefore\ \overline{BP}:\overline{BD}=a:a+b$

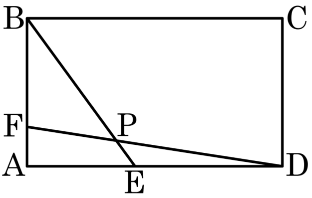
$\overline{PQ}//\overline{DC}$이므로 $\overline{BP}:\overline{BD}=\overline{PQ}:\overline{DC}$

$a:a+b=\overline{PQ}:b$

$(a+b)\overline{PQ}=ab$

$\therefore\ \overline{PQ}=\dfrac{ab}{a+b}$

10. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AE} = \overline{BF}$ 일 때, $\angle BPF$ 의 값을 구하여라.

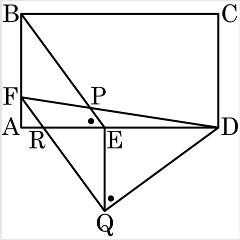


▶ 답 : ______ °

▷ 정답 : 45 °

해설

다음 그림과 같이 점 F 를 지나고 $\overline{BE}$ 에 평행한 직선과 점 E 를 지나고 $\overline{AB}$ 에 평행한 직선의 교점을 Q 라 하면 □FBEQ 는 평행사변형이다.



$\therefore\ \overline{BE} = \overline{FQ},\ \overline{FB} = \overline{QE},\ \angle FBE = \angle FQE$

선분 AB 와 선분 QE 는 평행하므로

$\angle QEA = \angle EAB = 90°$ (엇각)

$\therefore\ \angle QED = 90°$

$\overline{QE} = \overline{FB} = \overline{EA},\ \overline{ED} = \overline{AB}$ 이므로

$\triangle QED \equiv \triangle EAB$ (SAS 합동)

$\therefore\ \overline{QD} = \overline{EB} = \overline{QF},\ \angle DQE = \angle BEA$

이때, $\overline{AD}$ 와 $\overline{FQ}$ 의 교점을 R 이라 하면

선분 FQ 와 선분 BE 는 평행하므로

$\angle QRE = \angle BER$ (엇각)

$\therefore\ \angle DQE = \angle QRE$

$\triangle QRE$ 에서

$\angle QRE + \angle RQE = 90°$ 이므로

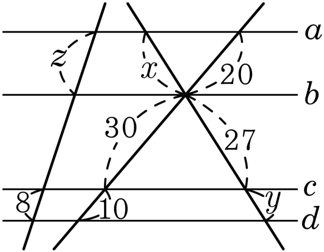
$\angle DQE + \angle RQE = \angle RQD = 90°$

즉, $\triangle QFD$ 는 $\overline{QF} = \overline{QD}$ 이고 $\angle FQD = 90°$ 인 직각이등변삼각형이므로

$\angle QFD = 45°,\ \angle BPF = \angle QFD$ (엇각) 이므로

$\therefore\ \angle BPF = 45°$ (엇각)

11. 다음 그림에서 $a \,/\!/\, b \,/\!/\, c \,/\!/\, d$ 일 때, $x+y+z$ 의 값은?



① 35 ② 38 ③ 40 ④ 43 ⑤ 45

해설

$20:30=x:27$이므로 $x=18$

$30:10=27:y$이므로 $y=9$

$20:10=z:8$이므로 $z=16$

$\therefore\ x+y+z=43$