1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉡ 식 + 2×㉠식에 대입하면

$$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$$

$$\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$$

㉠: $3x = y$ 를 ㉠식에 대입하면

$$7x^2 = 7x = 1(x > 0), \quad y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

㉡: $2x = 3y$ 를 4×㉠식에 대입하면

$$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2(y > 0), \quad x = 3$$

$$\therefore x + y = 5$$

$$a > b \text{ 이므로 } a = 5, b = 4$$

$$\therefore a - b = 1$$

2. $x = \alpha$, $y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \quad \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{ 불능}$$

$x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y \pm 1, x \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

3. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근 α 를 가질 때, $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} \text{에서 } (k-1)\alpha - 3(k-1) = 0,$$

$$(k-1)(\alpha-3) = 0$$

(i) $k=1$ 인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$ 으로 일치하여
공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

$$\text{(ii) } \alpha=3 \text{인 경우 } 9+3k+3=0 \therefore k=-4$$

$$\therefore \alpha - k = 7$$

4. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 의 공통근이 2이므로 $x = 2$ 를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$$2^2 - 2a + 10 = 0, 2^2 + 2 + b = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

이 때, $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \text{이므로 } x = 2, 5$$

또, $x^2 + x - 6 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \text{이므로 } x = 2, -3$$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은 5, -3이므로 두 근의 합은 2이다.

5. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

6. 두 이차방정식 $ax^2 + 4x + 2 = 0$, $x^2 + ax + 1 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$

② $-\frac{7}{2}$

③ $-\frac{5}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$$at^2 + 4t + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$t^2 + at + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \times 2 : (a-2)t^2 + (4-2a)t = 0$$

$$(a-2)t(t-2) = 0$$

이때, $a = 2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a \neq 2$

그런데 $t = 0$ 이면 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 해가 존재하지 않으므로 $t = 2$

따라서 $\textcircled{㉡}$ 에서 $2a + 5 = 0$

$$\therefore a = -\frac{5}{2}$$

7. 방정식 $2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$

② -1

③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 에서

$x^2 + 4xy + 4y^2 + x^2 + 2x + 1 = 0,$

$(x + 2y)^2 + (x + 1)^2 = 0$

x, y 가 실수이므로 $x + 2y = 0 \dots\dots$ ①, $x + 1 = 0 \dots\dots$ ②

①, ②에서 $x = -1, y = \frac{1}{2}$

$\therefore x + y = -\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면 $2x^2 + 2(2y+1)x + (4y^2+1) = 0 \dots\dots$ ①

x 가 실수이므로 $\frac{D}{4} = (2y + 1)^2 - 2(4y^2 + 1) \geq 0$

$\therefore (2y - 1)^2 \leq 0$

그런데 $2y - 1$ 이 실수이므로 $2y - 1 = 0$

$\therefore y = \frac{1}{2} \dots\dots$ ②

②를 ①에 대입하면

$2x^2 + 4x + 2 = 0, (x + 1)^2 = 0$

$\therefore x = -1 \dots\dots$ ③

②, ③에서 $x + y = -\frac{1}{2}$

8. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2$, $x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

9. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$ 을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha$, $y = \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, \quad xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, \quad y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

10. 방정식 $2xy - 4x - y = 4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x - 1)(y - 2) = 6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x - 1, y - 2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x - 1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y - 2 = 6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ y - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$