

1.  $-64$ 의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

해설

$-64$ 의 세제곱근은  $x^3 = -64$ 를 만족하는  $x$ 의 값이므로  
 $x^3 + 64 = 0$ 에서  
 $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 0$   
 $\therefore x + 4 = 0$  또는  $x^2 - 4x + 16 = 0$   
 $\therefore x = -4$  또는  $x = 2 + 2\sqrt{3}i$  또는  $x = 2 - 2\sqrt{3}i$   
따라서  $-64$ 의 세제곱근은  
 $-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

2.  $(\sqrt[5]{2})^4 \times \sqrt[5]{64}$ 의 값을 구하면?

- ① 1      ② 2      ③  $\sqrt[5]{128}$       ④ 4      ⑤  $\sqrt[5]{512}$

해설

$$2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

3.  $a > 0, b > 0$  일 때,  $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$  을 간단히 하면?

- ①  $\sqrt[6]{a}$     ②  $\sqrt[6]{b}$     ③  $\sqrt[6]{ab}$     ④  $\sqrt[6]{a^2b}$     ⑤  $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3} \\ &= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \\ &= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

4. 양수  $a$ 에 대하여  $(a^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \div (a^{-\sqrt{54}})$ 를 간단히 하면?

- ①  $a^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$     ②  $a^{\sqrt{2}}$     ③  $a^{-\sqrt{16}}$     ④  $a^{5\sqrt{6}}$     ⑤  $a^{36}$

해설

지수를 따로 써 보면

$$2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$$

$$= 5\sqrt{6}$$

$$\therefore a^{5\sqrt{6}}$$

5.  $12^3 \times 2^{-4} \div 3^2$ 의 값은?

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 12      ⑤ 24

해설

$$\begin{aligned}(2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} &= 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} \\ &= 2^2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

6.  $a > 0$ 일 때,  $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}$ 을 간단히 하면?

- ①  $a$       ②  $\sqrt{a}$       ③  $a\sqrt[7]{a^5}$       ④  $\sqrt[8]{a^5}$       ⑤  $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}} &= (a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}\end{aligned}$$

7.  $x = 2$ 일 때,  $x^{x^x}$ 의 값을 구하면?

- ①  $2^2$       ②  $2^4$       ③  $2^8$       ④  $2^{16}$       ⑤  $2^{32}$

해설

$$x^{x^x} = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

8. 16의 네제곱근 중 음수인 것을  $a$ , -27의 세제곱근 중 실수인 것을  $b$ 라 할 때,  $ab$ 의 값은?

- ① -12    ② -6    ③ 6    ④ 12    ⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은

$$-\sqrt[4]{16} = -2 \quad \therefore a = -2$$

-27의 세제곱근을  $x$ 라 하면

$$x^3 = -27, \quad (x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

이때, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

$$\therefore b = -3$$

$$\therefore ab = (-2) \times (-3) = 6$$

9.  $x > 0, x \neq 1$  일 때,  $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[k]{x^k}$  을 만족하는 자연수  $k$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

10.  $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}}$  를 간단히 하여  $\sqrt[n]{4}$ 로 나타낼 때, 자연수  $n$ 의 값은?

- ① 4      ② 6      ③ 9      ④ 12      ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}} &= \frac{\sqrt[6]{\sqrt{2^4}}}{\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}} \times \frac{\sqrt[9]{\sqrt{5}}}{\sqrt[9]{\sqrt[3]{2^6}}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[18]{5}} \times \frac{\sqrt[18]{5}}{\sqrt[27]{2^6}} \\ &= \frac{\sqrt[3 \times 4]{2^4}}{\sqrt[9 \times 3]{2^{3 \times 2}}} = \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[27]{2^6}} \\ &= \frac{\sqrt[9]{2^3}}{\sqrt[9]{2^2}} = \sqrt[9]{\frac{2^3}{2^2}} \\ &= \sqrt[9]{2} = \sqrt[18]{4} \\ \therefore n &= 18 \end{aligned}$$

11.  $\frac{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{4}} = 2^k$  이 성립할 때,  $k$  의 값은?

- ①  $-\frac{2}{3}$     ②  $-\frac{1}{3}$     ③  $\frac{1}{3}$     ④  $\frac{2}{3}$     ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진식)} &= \frac{5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

12.  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ 를  $4^{\frac{m}{n}}$ 으로 나타낼때,  $m+n$ 의 값은? (단,  $m, n$ 은 서로소인 자연수)

- ① 21      ② 22      ③ 39      ④ 41      ⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

또한,  $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = (2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}} \\ \therefore m &= 36, n = 13 \\ \therefore m+n &= 49\end{aligned}$$

13. 등식  $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}} = 27$ 을 만족하는 양수  $a$ 의 값은?

- ① 3      ②  $3^2$       ③  $3^3$       ④  $3^6$       ⑤  $3^9$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}} &= \left\{a\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a \cdot a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$a^{\frac{1}{3}} = 3^3 \text{ 이므로 } \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (3^3)^3$$

$$\therefore a = 3^9$$

14. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

①  $(-100)^0$

②  $a^2 \times a \div a^3$

③  $\frac{3^3 \div 3^2}{3}$

④  $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \frac{1}{a^2 \sqrt{3}}$

⑤  $a^{\sqrt{2}} \times \frac{a^3}{a^3 \sqrt{2}}$

해설

①  $(-100)^0 = 1$

②  $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③  $\frac{3^3 \div 3^2}{3} = \frac{3^{3-2}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

④  $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \frac{1}{a^2 \sqrt{3}}$   
 $= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$   
 $= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤  $a^{\sqrt{2}} \times \frac{a^3}{a^3 \sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^3 \sqrt{2} = a^{\sqrt{2}+3-3} \sqrt{2} = a^{\sqrt{2}} \sqrt{2}$

15. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2^{\frac{7}{8}}$       ㉡  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2$   
㉢  $(3^{\sqrt{2}})\times(3^{\sqrt{2}})=9$

- ① ㉠                      ② ㉠, ㉡                      ③ ㉠, ㉢  
④ ㉡, ㉢                      ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$   
 $=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{7}{8}}$   
∴ 참

㉡  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=(2^2)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$  ∴ 거짓

㉢  $(3^{\sqrt{2}})\times(3^{\sqrt{2}})=(3^{\sqrt{2}})^2=3^{2\sqrt{2}}$  ∴ 거짓

16. 실수  $a, b, c, d$ 에 대하여  $2^a = c, 2^b = d$ 일 때,  $4^{a+b}$ 와 같은 것은?

- ①  $\frac{1}{cd}$     ②  $\frac{1}{2cd}$     ③  $\frac{1}{c^2d}$     ④  $cd$     ⑤  $c^2d^2$

해설

$$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$$

17.  $a = 5 \times 729^x$  일 때,  $27^x$ 을  $a$ 에 관한 식으로 나타내면?

①  $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

②  $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③  $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④  $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤  $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

18.  $3^x = 5$  일 때,  $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$  의 값을 구하면?

- ① 3      ②  $\sqrt{3}$       ③ 5      ④  $\sqrt{5}$       ⑤  $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

19.  $4^{x-1} = a$ 일 때,  $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}$  을  $a$ 에 대한 식으로 나타낸 것은?

- ①  $\sqrt{a}$     ②  $a\sqrt{a}$     ③  $\sqrt[3]{a}$     ④  $\sqrt[5]{a^2}$     ⑤  $a^2\sqrt{a}$

해설

$$4^{x-1} = 2^{2(x-1)} = a \text{ 이므로}$$

$$2^{x-1} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x} = (2^{-5})^{1-x} = 2^{5(x-1)}$$

$$= (2^{x-1})^5 = (a^{\frac{1}{2}})^5 = a^{\frac{5}{2}} = a^2\sqrt{a}$$

20. 임의의 실수  $x$ 의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를  $f(x)$ 라 할 때,  $f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$ 의 값은?

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

해설

$2^{-2} = \frac{1}{4} > 0$ ,  $-2^2 = -4 < 0$ ,  $2^0 = 1 > 0$ 이고 4는 짝수이므로

$$f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$$

$$= 2 + 0 + 2$$

$$4$$

21.  $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}} \cdot \sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$ 의 값은?

- ① 20      ②  $\sqrt{401}$       ③  $\sqrt{402}$       ④  $\sqrt[4]{401}$       ⑤  $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{402+2\sqrt{401}} \cdot \sqrt[4]{402-2\sqrt{401}} \\ &= \sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{401}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{401}-1} = \sqrt{401-1} = 20 \end{aligned}$$

22.  $a = 2^{12}$  일 때,  $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$$

$a = 2^{12}$  이므로

$$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$$

23. 세 수  $A = \sqrt[3]{4}$ ,  $B = \sqrt[4]{6}$ ,  $C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

- ①  $A > B > C$       ②  $B > A > C$       ③  $C > B > A$   
④  $A > C > B$       ⑤  $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4}$ ,  $B = \sqrt[4]{6}$ ,  $C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과

지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

$$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$$

$$\therefore A > B > C$$

24.  $2^x - 2^{-x} = 2\sqrt{3}$  일 때,  $4^x - 4^{-x}$  의 값은?

- ① 4      ② 6      ③ 8      ④  $8\sqrt{3}$       ⑤  $12\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}4^x - 4^{-x} &= (2^x)^2 - (2^{-x})^2 \\ &= (2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x}) \\ &= 2\sqrt{3}(2^x + 2^{-x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{한편, } (2^x + 2^{-x})^2 &= (2^x - 2^{-x})^2 + 4 \\ &= (2\sqrt{3})^2 + 4 = 16\end{aligned}$$

$$2^x + 2^{-x} > 0 \text{ 이므로 } 2^x + 2^{-x} = 4$$

$$\therefore 4^x - 4^{-4x} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$$

25.  $2^x = 3$ 일 때,  $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{8}$       ②  $\frac{3}{13}$       ③  $\frac{3}{10}$       ④  $\frac{3}{8}$       ⑤  $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

26.  $20^a = 5\sqrt{3}$ ,  $20^b = 2$  일 때,  $10^{\frac{2a}{1-b}}$  의 값은?

- ① 25      ② 35      ③ 55      ④ 65      ⑤ 75

해설

주어진 조건과 같이 밑이 20이 되도록 구하려는 식을 변형한다.

$$10 = \frac{20}{2} = \frac{20}{20^b} = 20^{1-b}$$

$$\therefore 10^{\frac{2a}{1-b}} = (20^{1-b})^{\frac{2a}{1-b}} = 20^{2a} = (20^a)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

27. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율을 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5번째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7번째 복사본에서 도형의 넓이는 4번째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

- ①  $\sqrt{8}$     ②  $\sqrt[3]{8}$     ③  $\sqrt{8}$     ④  $\sqrt[3]{4}$     ⑤  $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를  $A$ , 확대 배율을  $a$ 로 놓으면 5번째 복사본에서 도형의 넓이는  $A \cdot a^5$ 이므로

$$A \cdot a^5 = 2A \text{ 에서 } a^5 = 2 \quad \therefore a = \sqrt[5]{2}$$

7번째 복사본에서 도형의 넓이는  $A \cdot a^7$

4번째 복사본에서 도형의 넓이는  $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

28. 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

- ㉠  $-8$ 의 세제곱근은  $\sqrt[3]{-8}$ 이다.
- ㉡  $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ 이다.
- ㉢  $a < 0$  일 때,  $(\sqrt[3]{a})^3 = a$  이다.
- ㉣  $n$ 이 2 이상인 홀수일 때, 실수  $a$ 에 대하여  $x^n = a$ 를 만족하는 실수  $x$ 는 1개다.
- ㉤  $a < 0$  일 때,  $\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[3]{(-a)^3} = 0$  이다.

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉣

③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

- ㉠ (거짓)  $-8$ 의 세제곱근은  $\sqrt[3]{-8}, 1 \pm \sqrt{3}i$ 이다.
- ㉡ (참)
- ㉢ (참)
- ㉣ (참)
- ㉤ (거짓)  $(-a) + (-a) = -2a$

29.  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt[3]{4}$ ,  $c = \sqrt[3]{5}$  일 때, 세 수  $a, b, c$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

①  $a < b < c$                       ②  $c < b < a$                       ③  $b < c < a$

④  $a < c < b$                       ⑤  $c < a < b$

해설

$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$   
 $b = \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$   
 $c = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$  이므로 세 수를 각각 6제곱한다.  
 $a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$   
 $b^6 = (4^{\frac{1}{3}})^6 = 4^2 = 16$   
 $c^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^2 = 25$   
 $8 < 16 < 25$  이므로  $a < b < c$

30.  $p = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$   
 $\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$ 에 대하여  $2 - p = 2^k$ 일 때, 실수  $k$ 의 값은?

- ① -5      ② -16      ③ -30      ④ -31      ⑤ -32

해설

$$\begin{aligned}
 p &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
 \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \text{의 양변에 } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \text{을 곱하면} \\
 \left(1 - \frac{1}{2}\right)p &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\
 &\quad \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{32}} \\
 \frac{1}{2}p &= 1 - \frac{1}{2^{32}}, \quad p = 2 - \frac{1}{2^{31}} \\
 2 - p &= \frac{1}{2^{31}} = 2^{-31} \\
 \therefore k &= -31
 \end{aligned}$$

31.  $a^{2x} = 5$  일 때,  $\frac{a^{3x} - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-x}}$  의 값은? (단,  $a > 0$ )

- ①  $\frac{4}{9}$       ②  $\frac{6}{11}$       ③  $\frac{9}{13}$       ④  $\frac{11}{13}$       ⑤  $\frac{12}{13}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x} - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-x}} &= \frac{(a^{3x} - a^{-x}) \times a^x}{(a^{3x} + a^{-x}) \times a^x} \\ &= \frac{a^{4x} - 1}{a^{4x} + 1} = \frac{(a^{2x})^2 - 1}{(a^{2x})^2 + 1} \\ &= \frac{5^2 - 1}{5^2 + 1} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}\end{aligned}$$

32.  $42^a = 7$ ,  $42^b = 3$  일 때,  $14^{\frac{a+b}{1-b}}$  의 값은?

- ① 3      ② 7      ③ 10      ④ 14      ⑤ 21

해설

$42^a = 7$ ,  $42^b = 3$  에서 두 식을 곱하면  $42^{a+b} = 21 \dots \text{㉠}$

$42^b = 3$ ,  $42 \div 42^b = 42 \div 3$  이므로  $42^{1-b} = 14 \dots \text{㉡}$

㉡ 에서  $42 = 14^{\frac{1}{1-b}}$ ,  $42^{a+b} = (14^{\frac{1}{1-b}})^{a+b} = 14^{\frac{a+b}{1-b}}$

㉠ 에서  $42^{a+b} = 21$  이므로  $14^{\frac{a+b}{1-b}} = 21$

33. 네 수  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt[4]{5}$ ,  $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$ ,  $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$  중에서 서로 다른 세 수를 택하여 이들이 각각 세 모서리의 길이가 되는 직육면체를 만들려고 한다. 이와 같은 방법으로 만든 직육면체의 부피의 최솟값은?

- ①  $\sqrt[12]{460}$                       ②  $\sqrt[12]{680}$                       ③  $\sqrt[12]{880}$   
 ④  $\sqrt[6]{680}$                       ⑤  $\sqrt[6]{880}$

**해설**

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[12]{(2\sqrt{2})^4} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{11^2} = \sqrt[12]{121}$$

$$\therefore \sqrt[3]{2\sqrt{2}} < \sqrt{\sqrt[3]{10}} < \sqrt[3]{\sqrt{11}} < \sqrt[4]{5}$$

그러므로 세 모서리의 길이가  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$ ,  $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$  일 때, 직육면체의 부피가 최소이다.

따라서 구하는 부피의 최솟값은

$$\sqrt[12]{8^2 \times 10^2 \times 11^2} = \sqrt[6]{8 \times 10 \times 11} = \sqrt[6]{880}$$