

1. $\left\{\frac{n^2-1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 100항은?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{9}{10}$

③ $\frac{99}{100}$

④ $\frac{99}{101}$

⑤ $\frac{101}{100}$

해설

$$\left\{\frac{n^2-1}{n(n+1)}\right\} = \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \text{제 100항은 } \frac{99}{100}$$

2. $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{11}$

③ $\frac{1}{110}$

④ $\frac{1}{111}$

⑤ $\frac{1}{1010}$

해설

$$\frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{110}$$

3. 수열 1, -3, 5, -7, 9, ... 의 100번째 항은?

- ① -199 ② -99 ③ -59 ④ 99 ⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는
꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$$

4. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = -2n - 2$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -1, d = 2$

② $a = -1, d = -2$

③ $a = -2, d = -2$

④ $a = -4, d = -2$

⑤ $a = -4, d = 2$

해설

$$a_n = -2n - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = -2 \cdot 1 - 2 = -4,$$

$$a_2 = -2 \cdot 2 - 2 = -6 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = -2$$

5. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

-4, (가), 10, (나), (다)

- ① 1, 12, 14
- ② 3, 17, 24
- ③ 3, 17, 20
- ④ 7, 17, 24
- ⑤ 7, 13, 16

해설

-4와 10의 등차중항은 $\frac{-4+10}{2} = 3$, 이 수열의 공차는 7이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 3, 17, 24이다.

6. 첫째항이 -4 , 공차가 3 인 등차수열의 첫째항부터 제 17 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설

$$S_{17} = \frac{17 \{ 2 \cdot (-4) + (17 - 1) \cdot 3 \}}{2} = \frac{680}{2} = 340$$

7. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

- ☐ ㉠ 1, 4, 9, 16, 25,...
- ☐ ㉡ 3, 9, 27, 81, 243,...
- ☐ ㉢ 9, 99, 999, 9999, 99999,...
- ☐ ㉣ 2, 3, 4, 9, 8, 27
- ☐ ㉤ $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

- ☐ ① ㉠
- ☐ ② ㉠, ㉡
- ☐ ③ ㉡, ㉣
- ☒ ④ ㉡, ㉤
- ☐ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

8. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4a_5a_6 = 125$ 일 때, a_5 의 값은?

① 2

② 5

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_4a_5a_6 = ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5 = a^3r^{12} = (ar^4)^3 \text{ 이므로}$$

$$(ar^4)^3 = 125 = 5^3$$

$$\therefore a_5 = ar^4 = 5$$

9. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4$, $\sum_{i=1}^{100} y_i = 6$ 일때, $\sum_{k=1}^{100} (3x_k - 2y_k)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} (3x_k - 2y_k) &= 3 \sum_{k=1}^{100} x_k - 2 \sum_{k=1}^{100} y_k \\ &= 3 \sum_{i=1}^{100} x_i - 2 \sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0\end{aligned}$$

10. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

- ① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

11. 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -20은 몇째 항인가?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times (-3) \\ &= 7 + (n-1) \times (-3) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = -3n + 10$$

$$-3n + 10 = -20$$

$$-3n = -30$$

$$n = 10$$

12. 등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차를 d 로 놓으면
305는 제 102항이므로

$$305 = 2 + (102 - 1)d$$

$$\therefore d = \frac{303}{101} = 3$$

13. 세 수 $5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 등차수열을 이루면 $4 - x$ 가 등차중항이므로

$$4 - x = \frac{(5 - 2x) + (6 + 3x)}{2}$$

$$2(4 - x) = 5 - 2x + 6 + 3x$$

$$8 - 2x = 11 + x$$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

14. 조화수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ 의 일반항은?

① $2n - 1$

② $2n + 1$

③ $\frac{3}{n}$

④ $\frac{6}{n}$

⑤ $\frac{1}{2n + 1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3, 5, 7, 9, \dots$

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $2n + 1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{2n + 1}$

15. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned}a_{10} &= S_{10} - S_9 \\S_{10} &= 10^2 + 20 - 1 = 119, \\S_9 &= 9^2 + 18 - 1 = 98 \\ \therefore a_{10} &= 119 - 98 = 21\end{aligned}$$

16. 세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2x = 1 + 5 = 6 \quad \therefore x = 3$$

세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2 = 5$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 14$$

17. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{ (\omega^2)^{36} - 1 \}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

18. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$

② $\frac{x^{2n}}{x-1}$

③ $\frac{x^{2n}-1}{x-1}$

④ $\frac{x^{2n}-1}{x}$

⑤ $\frac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x , 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x - 1}$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

20. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250

② 300

③ 450

④ 550

⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

21. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = a\sqrt{2} + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots\} \\ &\quad + \{(\sqrt{49} - \sqrt{50})\} \\ &= -(1 - \sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

따라서, $a = 5$, $b = -1$ 에서 $a + b = 4$

22. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$
⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

23. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$
④ $\frac{n}{2n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$
⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\} \\&\quad + \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}\end{aligned}$$

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$ 과 같은 것은?

① $a_{20} - a_9$

② $a_{20} - a_{10}$

③ $a_{21} - a_9$

④ $a_{21} - a_{10}$

⑤ $a_{21} - a_{11}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ 이므로} \\ a_{21} &= a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20} \\ b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20} \\ &= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_9) \\ &= a_{21} - a_{10} \end{aligned}$$

25. 다음 수열의 □안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \dots$

- ① $\frac{4}{21}$
- ② $\frac{8}{21}$
- ③ $\frac{10}{21}$
- ④ $\frac{14}{21}$
- ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

균으로 나눠 보면
 $\frac{1}{1}/\frac{1}{3}, \frac{2}{2}/\frac{3}{1}, \frac{1}{5}/\frac{2}{4}, \frac{3}{3}/\frac{4}{2}, \frac{5}{1}/$
따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.
 $\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$

26. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

27. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9 \log_3 2$

② $10 \log_3 2$

③ $11 \log_3 2$

④ 9

⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

$a_1 = 1$, $r = \frac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9 \log_3 3 = 9$$

28. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

29. 첫째항이 100이고, 공차가 -3인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$$\begin{aligned}a_n &= 100 + (n - 1) \cdot (-3) \\&= -3n + 103 > 0 \\n &< 34.333 \cdots \\\therefore n &= 34 \text{ 일 때 최대}\end{aligned}$$

30. 8, a , b 가 이 순서로 등차수열을 이루고, a , b , 36이 이 순서로 등비수열을 이루도록 하는 양수 a , b 의 값을 정할 때, a , b 의 최대공약수는?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

a 는 8과 b 의 등차중항이므로

$$2a = 8 + b \cdots \textcircled{㉠}$$

b 는 a 와 36의 등비중항이므로

$$b^2 = 36a \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $a = \frac{1}{2}(8 + b)$ 이므로 ㉡에 대입하면

$$b^2 = 18(8 + b), \quad b^2 - 18b - 144 = 0$$

$$(b - 24)(b + 6) = 0$$

$$\therefore b = 24 \text{ 또는 } b = -6$$

그런데 b 는 양수이므로 $b = 24$

$$\therefore a = \frac{1}{2}(8 + 24) = 16$$

16과 24의 최대공약수는 8이다.

31. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n} = 7$ 일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1 이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} = 7, \frac{r^{3n}-1}{r^n-1} = 7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1} = 7, r^{2n}+r^n+1 = 7$$

$$(r^n)^2+r^n-6 = 0, (r^n+3)(r^n-2) = 0$$

$$\therefore r^n = 2 (\because r > 1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} = \frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1} = r^n+1 = 3$$

32. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 a, b, c 인 직육면체에 대하여 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180일 때, 이 직육면체의 부피는?

- ① 174 ② 188 ③ 202 ④ 216 ⑤ 230

해설

등비수열 a, b, c 의 공비를 r 이라 하면 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 a, ar, ar^2 이다.
모서리의 길이의 총합은 $4(a + ar + ar^2) = 60$ 에서
 $a(1 + r + r^2) = 15 \cdots \textcircled{1}$
또, 겉넓이는 $2(a \cdot ar + a \cdot ar^2 + ar \cdot ar^2) = 180$ 에서
 $a^2r(1 + r + r^2) = 90 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 에서 $ar = 6$
따라서 직육면체의 부피 V 는
 $V = a \cdot ar \cdot ar^2 = a^3r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$

33. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = (3 \cdot 2^1 + k)$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

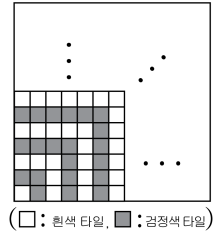
$$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

따라서, $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면

$\textcircled{1}$ 이 $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로

$$3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$$

34. 한 변이 100cm인 정사각형 모양의 바닥을 한 변이 5cm인 정사각형 모양의 타일로 빈틈없이 붙이려고 한다. 그림과 같이 흰색 타일과 검정색 타일로 바닥을 붙일 때, 필요한 흰색타일의 총 개수는?



- ① 185 ② 190 ③ 200 ④ 205 ⑤ 210

해설

흰색 타일의 총 개수는

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 5, a_3 = 1 + 5 + 9, \dots$$

$$a_{10} = 1 + 5 + 9 + \dots + 37 = \frac{10(1 + 37)}{2} = 190$$

35. 수열 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, ... 에서 13은 제 a 항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제 b 항이라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면
(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), (9, 9, 9, 9, 9), ...
이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.
6군까지의 항수가 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 이므로 제 7군의
첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.
따라서 $a + b = 22 + 28 = 50$

36. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\vdots$$
$$+ \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right.$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

37. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_4 = 72$ 일 때, a_5 의 값은?

① $72\sqrt{3}$

② $72\sqrt{6}$

③ 144

④ $144\sqrt{3}$

⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$ 에 $m = 2, n = 2$ 를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 =$

$72, a_2^2 = 36$

$\therefore a_2 = 6(\because a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 에 $m = 1, n = 1$ 을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6, a_1^2 = 3$

$\therefore a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 에 $m = 4, n = 1$ 을 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

38. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

- $a_1 = 1, a_2 = 2$
- $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore p = 3, q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

39. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의될 때,
 $a^{2014} a^{2015} a^{2016}$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = \frac{1}{2}, a_6 = -1, \dots$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -1$ 이 반복되는 수열이고

$a^{2014}, a^{2015}, a^{2016}$ 은 연속한 세 항의 곱이므로

$$2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$$

40. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\ominus)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\omin�)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\omin�)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\omin�$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.
 $\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$
 $\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$
 $\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$

41. 첫째항이 3이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 이 수열의 처음 n 개의 항의 합이 다음 n 개의 항의 합의 $\frac{1}{3}$ 과 같을 때, d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 문제의 조건으로 부터

$$S_n = \frac{1}{3}(S_{2n} - S_n), \quad 3S_n = S_{2n} - S_n$$

$$\therefore S_{2n} = 4S_n$$

$$\frac{2n\{2 \cdot 3 + (2n-1)d\}}{2} = 4 \cdot \frac{n\{2 \cdot 3 + (n-1)d\}}{2}$$

$$6 + (2n-1)d = 2\{6 + (n-1)d\} \quad (n \neq 0)$$

$$6 + 2nd - d = 12 + 2nd - 2d$$

$$\therefore d = 6$$

42. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 이라 하자. P_n 의 값이 최대일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$ 이고, $a_n \neq 1$ 이므로
 $a_{n+1} > 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} > P_n$,
즉, $P_{n+1} > P_n$
 $a_{n+1} < 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$
따라서, $a_n > 1$ 인 마지막 항까지의 곱이 P_n 의 최댓값이다.
 $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1, 2^{n-1} < 3000$
 $2^{11} = 2048$ 이므로 $n - 1 = 11 \quad \therefore n = 12$

43. 원산지에서 생산되는 참외 가격은 도매상에서 중간상인을 거칠 때마다 일정한 비율로 오른다. 소비자에게 판매하기까지 중간 상인을 5번 거칠 때 참외 가격이 원산지 가격의 5배가 되었다고 한다. 유통과정을 개선하여 중간상인을 2번 거치게 하면 소비자에게 판매되는 가격은 원산지 가격의 약 몇 배가 되는가?(단, $\sqrt[5]{5} = 1.38$ 로 계산한다.)
- ① 약 1.2배 ② 약 1.5배 ③ 약 1.9배
④ 약 2.5배 ⑤ 약 3.4배

해설

원산지의 참외 가격은 중간상인을 한 번 거칠 때마다 일정한 비율로 오르므로 처음 가격을 a , 중간상인을 거칠 때마다 r 배가 된다고 하자. 중간상인을 5번 거친 후 원산지 가격의 5배가 되었으므로

$$ar^5 = 5a$$
$$r^5 = 5$$
$$r^2 = (r^5)^{\frac{2}{5}} = 5^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{5})^2$$
$$\therefore r^2 = 1.38^2 = 1.9044$$

44. 연이율 5%, 1년마다 복리로 2015년부터 매년 초에 10만원씩 적립할 때, 2020년 말까지의 원리합계를 구하여라. (단, $1.05^6 = 1.34$ 로 계산한다.)

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 714000 원

해설

$$\begin{aligned} a &= 10^5 \times (1.05 + 1.05^2 + \cdots + 1.05^6) \\ &= 10^5 \times \frac{1.05(1.05^6 - 1)}{1.05 - 1} \\ &= 10^5 \times \frac{1.05(1.34 - 1)}{0.05} = 10^5 \times 21 \times 0.34 = 714000(\text{원}) \end{aligned}$$

45. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = 2n$ 일 때, 새로운 수열 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 만들었다.
- $$b_n = \left\lfloor \frac{a_n}{10} \right\rfloor$$
- 이때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제100항 까지의 합을 구하여라.(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 970

해설

$a_n = 2n$ 일 때, 수열 $\{b_n\}$ 을 구해 보면 $b_n = \left\lfloor \frac{a_n}{10} \right\rfloor$ 에서

$b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 0,$
 $b_5 = 1, b_6 = 1, b_7 = 1, b_8 = 1, b_9 = 1$
 $b_{10} = 2, b_{11} = 2, b_{12} = 2, b_{13} = 2, b_{14} = 2,$
 $\vdots$
 $b_{95} = 19, b_{96} = 19, b_{97} = 19, b_{98} = 19, b_{99} = 19,$
 $b_{100} = 20$

따라서 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합은

$$5(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) + 20 = 5 \times \frac{19(1 + 19)}{2} + 20 = 970$$

46. n 이 자연수일 때, $n + (n - 1)2 + (n - 2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$ 의 값은?

- ① 2^{n+1}

② $2^{n+1} - n$

③ $2^{n+1} - n - 2$
- ④ $2^n + n2$

⑤ $2^n n + 2$

해설

주어진 식의 값을 S 라 하면
 $S = n + (n - 1)2 + (n - 2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$
 역급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{r} 2S = \quad n \cdot 2 \quad + (n-1)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ -) S = n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + \quad 2^{n-1} \\ \hline S = -n + \quad 2 + \quad 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \end{array}$$

$$\therefore S = -n + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - n - 2$$

47. 자연수로 이루어진 순서쌍의 수열
(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4),
(2, 3), (3, 2) (4, 1), (1, 5),... 에서 두 수가 모두 한 자리의 자연수로
이루어진 순서쌍의 총 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

주어진 수열을 순서쌍의 두 수의 합이 같은 것 끼리 군을 묶으면
(1, 1)|(1, 2), (2, 1)|(1, 3), (2, 2), (3, 1)|,...

이 때, 각 군에서 모든 항의 순서쌍의 두 수가 한 자리의 자연수
인 군의 수를 구하기 위해 두수의 합이 10이 되는 것부터 세면

$$1+2+3+\cdots+10=\frac{9\cdot 10}{2}=45\cdots㉠$$

두 수의 합이 11인 순서쌍의 개수는 10이고, 이중 한 자리의
자연수로만 이루어진 순서쌍은(1, 10), (10, 1)을 제외한 8개다.

같은 방법으로 두 수의 합이 12인 순서쌍의 개수는 11이고, 이
중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은 $11-4=7$ (개)이다.

두 수의 합이 18로 이루어진 순서쌍 중 한 자리의 자연수로만
이루어진 순서쌍의 개수는 $17-16=1$ (즉, (9, 9))이므로 모두

$$(10-2)+(11-4)+(12-6)+(13-8)+(14-10)$$

$$+(15-12)+(16-14)+(17-16)$$

$$=8+7+6+\cdots+1=\frac{8\cdot 9}{2}=36\cdots㉡$$

따라서, ㉠, ㉡에서 두 수가 모두 한자리의 자연수로 이루어진
순서쌍의 총 개수는 81이다.

48. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

- I. $a_1 = 3$
II. a_{n+1} 은 a_n^2 을 7로 나눈 나머지이다.

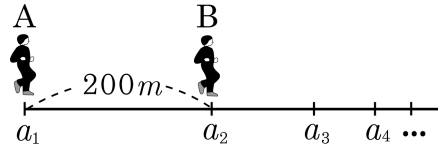
이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값은?

- ① 20 ② 24 ③ 35 ④ 40 ⑤ 42

해설

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 4 \\ a_4 &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$
$$\therefore, \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$$

49. 다음 그림과 같이 A와 B가 직선 위를 따라 같은 방향으로 달린다. B는 A보다 200m앞에서 A와 동시에 출발한다. A의 출발점을 a_1 , B의 출발점을 a_2 , A가 a_2 에 도달했을 때 B의 위치를 a_3 , A가 a_3 에 도달했을 때 B의 위치를 a_4 라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 점 $a_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 정한다. A의 속도가 B의 속도의 2배이면 A와 B사이의 거리가 1m이내가 되기 시작할 때 A의 위치는?



- ① a_4 와 a_5 사이 ② a_6 와 a_7 사이 ③ a_8 과 a_9 사이
 ④ a_{10} 과 a_{11} 사이 ⑤ a_{12} 과 a_{13} 사이

해설

$$a_2 - a_1 = 200, \quad a_3 - a_2 = 100 = 200 \times \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = 50 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \dots$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{200} \text{ 에서 } 2^{n-1} \geq 200$$

$$\therefore n \geq 9$$

$$a_{10} - a_9 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 200 \times \frac{1}{256} \leq 1$$

50. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\frac{5^n + 3^n}{2} \geq 4^n$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= \frac{5+3}{2} = 4$, (우변) $= 4^1 = 4$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{5^k + 3^k}{2} \geq \boxed{(가)}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
 $4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{(가)}$
이므로
 $\frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2}$
 $= \frac{\boxed{(나)}}{2} \geq 0$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $4^k, 5^k - 3^k$

② $4^{k+1}, 5^k - 3^k$
- ③ $4^k, 5^k + 3^k$

④ $4^{k+1}, 5^k + 3^k$
- ⑤ $4^{k+1}, 5^{k+1} - 3^{k+1}$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{5^k + 3^k}{2} \geq \boxed{4^k}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
 $4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{4^k}$
이므로
 $\frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2}$
 $= \frac{\boxed{5^k - 3^k}}{2} \geq 0$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.