

1. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$$

$$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$$

$$\therefore a_{10} = 119 - 98 = 21$$

2. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$2 \log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

3. 두 수 $2p + 1$ 과 $2p + 5$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p + 1, p^2, 2p + 5$ 가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p + 1) + (2p + 5)}{2}$

$$2p^2 = 4p + 6, p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p + 1)(p - 3) = 0$$

따라서 $p = -1$ 또는 $p = 3$

이때, p 는 양수이므로 $p = 3$

4. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 77$$

$$a_{10} = a + 9d = 42$$

$$5d = -35$$

$$d = -7$$

$$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore a = 105$$

$$\therefore a_n = 105 + (n - 1) \times (-7)$$

$$= -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$112 < 7n$$

$$16 < n$$

$$\therefore n = 17$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 -2 , 3 일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 의 공차는?

① 4

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라고 할 때,

$$3a_n + 5b_n$$

$$= 3\{a + (n-1) \times (-2)\} + 5\{b + (n-1) \times 3\}$$

$$= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1)$$

$$= 3a + 5b + 9(n-1)$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 은 첫째항이 $3a + 5b$ 이고, 공차가 9인 등차수열이다.

6. 4와 102 사이에 5 개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102 사이에 넣을 5 개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 265

해설

항의 개수가 7 개 이므로 7 개 항의 합을 S_7 , 구하는 수의 합을 S 라 하면

$$S = S_7 - (4 + 102) = \frac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$$

7. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100 이고, 11 항부터 20 항까지의 합이 300 일 때 21 항부터 30 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2, a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

8. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} \quad (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

9. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + kx - 8 = 0$ 의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a + ar + ar^2 = 7$ 에서
 $a(1 + r + r^2) = 7 \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$
 $a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + a \cdot ar^2 = k$ 에서
 $a^2r(1 + r + r^2) = k \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$
 $a \cdot ar \cdot ar^2 = 9$ 에서 $(ar)^3 = 8$
 $\therefore ar = 2 \dots\dots\dots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $k = a(1 + r + r^2) \cdot ar = 7 \times 2 = 14$
 $\therefore k = 14$

10. 첫째항부터 제3항까지의 합이 7, 제4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498

② 502

③ 511

④ 512

⑤ 524

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7 \dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 63 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 7(r^3 + 1) = 63$$

$$r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a(2^3 - 1) = 7 \quad \therefore a = 1$$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 512 - 1 = 511$$