

1. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n &= S_n - S_{n-1} \text{ 이므로} \\ a_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3} \\ &= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3} \\ &= n(n+1) \\ \therefore a_{15} &= 15 \times 16 = 240 \end{aligned}$$

2. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

-1, 2, -3, 4, ...

- ① $(-1)^{n+1} \times n$
- ② $n - (-1)^n$
- ③ $(-1)^n + n$
- ④ $(-1)^n \times n$
- ⑤ $\frac{1}{2} \{1 - (-1)^n\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$
 $a_2 = (-1)^2 \cdot 2$
 $a_3 = (-1)^3 \cdot 3$
 $a_4 = (-1)^4 \cdot 4$ 이므로
 $a_n = (-1)^n \cdot n$

3. 수열 1, -3, 5, -7, 9, ... 의 100번째 항은?

- ① -199 ② -99 ③ -59 ④ 99 ⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는
꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$$

4. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 77$$

$$a_{10} = a + 9d = 42$$

$$5d = -35$$

$$d = -7$$

$$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore a = 105$$

$$\therefore a_n = 105 + (n - 1) \times (-7)$$

$$= -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$112 < 7n$$

$$16 < n$$

$$\therefore n = 17$$

5. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

6. $a_5 = 27$, $a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 27$$

$$a_{11} = a + 10d = 15$$

연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 35$

$$\therefore a_n = 35 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 37$$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$37 < 2n, \quad 18.5 < n$$

$$\therefore n = 19$$

$\therefore \{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19} 이다.

7. 첫째항이 -43 , 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

- ① 제 8항 ② 제 9항 ③ 제 10항
④ 제 11항 ⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$7n - 50 > 0, \quad 7n > 50$$

$$\therefore n > \frac{50}{7} = 7.14 \cdots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

8. 수열 $8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

9. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n = 6$$

10. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의

최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n-1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

11. 첫째항이 -10 , 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{11}|$ 의 값은?

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} a_n &= -10 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 2n - 12 \end{aligned}$$

$$a_n = 2n - 12 = 0, \quad \therefore n = 6$$

즉, $a_1 \sim a_5$ 는 음수, $a_6 = 0$,

$a_7 \sim a_{11}$ 은 양수이다.

따라서

$$\begin{aligned} |a_1| + \cdots + |a_5| &= \left| \frac{5 \{ 2 \cdot (-10) + 4 \cdot 2 \}}{2} \right| \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$a_7 = -10 + 6 \cdot 2 = 2$$

$$a_{11} = -10 + 10 \cdot 2 = 10$$

$$\therefore |a_7| + \cdots + |a_{11}| = \frac{5 \cdot (2 + 10)}{2} = 30$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 30 + 0 + 30 = 60$$

12. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $-5 < d < -4$
㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$
㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\textcircled{1} \ a_3 = a_1 + 2d = 10 \text{에서 } a_1 = 10 - 2d$$

$$S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0 \text{에서 } a_1 + 4d > 0$$

$$10 - 2d + 4d > 0$$

$$\therefore d > -5$$

$$S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0 \text{에서 } 2a_1 + 9d < 0$$

$$2(10 - 2d) + 9d < 0$$

$$\therefore d < -4$$

$$\therefore -5 < d < -4(\text{참})$$

$$\textcircled{2} \ a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -10 < 2d < -8 \text{이므로}$$

$$0 < 10 + 2d < 2$$

$$\therefore, 0 < a_5 < 2$$

$$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$$

$$-15 < 3d < -12 \text{이므로}$$

$$-5 < 10 + 3d < -2$$

$$\therefore, -5 < a_6 < -2$$

$$\therefore a_5 > 0, a_6 < 0(\text{참})$$

$$\textcircled{3} \ a_1 = 10 - 2d \text{이므로}$$

$$-5 < d < -4 \text{에서 } 18 < 10 - 2d < 20$$

$$\therefore, 18 < a_1 < 20$$

$$a_1 \text{이 정수이므로 } a_1 = 19$$

$$a_1 + 2d = 10 \text{에서 } d = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$$

$$\therefore a_1 + a_9 = 2 \neq 0(\text{거짓})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

13. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 20이고, 공차는 d 인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$ 을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $S_n > 0$ 을 만족하는 n 의 최댓값은?

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13
- ⑤ 14

해설

$\{a_n\}$ 이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로

$$a_7 \cdot a_8 < 0 \text{에서 } a_7 > 0, a_8 < 0$$

$$a_7 = 20 + 6d > 0, a_8 = 20 + 7d < 0$$

이때 공차 d 는 정수이므로 $d = -3$

$S_n > 0$ 을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$$n(43 - 3n) > 0, n(3n - 43) < 0$$

$$\therefore 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

14. 첫째항이 100이고, 공차가 -3 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$$\begin{aligned}a_n &= 100 + (n - 1) \cdot (-3) \\&= -3n + 103 > 0 \\n &< 34.333 \cdots \\\therefore n &= 34 \text{ 일 때 최대}\end{aligned}$$