1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\left\{n+2-(n-1)\right\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

2. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$$

① $(-1)^{n+1} \times n$ ② $n-(-1)^n$ ③ $(-1)^n + n$

④ $(-1)^n \times n$ ⑤ $\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$

$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$

$a_4 = (-1)^4 \cdot 4$이므로

$a_n = (-1)^n \cdot n$

3. 수열 $1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ \cdots$ 의 100번째 항은?

① -199 ② -99 ③ -59 ④ 99 ⑤ 199

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 수열의 일반항은

$a_n = (-1)^{n-1} \times (2n-1)$

$\therefore\ a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$

4. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 77$

$a_{10} = a + 9d = 42$

$5d = -35$

$d = -7$

$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore \ a = 105$

$$\begin{aligned} \therefore \ a_n &= 105 + (n-1) \times (-7) \\ &= -7n + 112 \end{aligned}$$

$-7n + 112 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면

$112 < 7n$

$16 < n$

$\therefore n = 17$

5. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항

④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0,\ 3n > 28$

$$\therefore\ n > \frac{28}{3} = 9.33\cdots$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

6. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$

$a_{11} = a + 10d = 15$

연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$

$\therefore\ a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n의 최솟값을 구하면

$37 < 2n, \quad 18.5 < n$

$\therefore\ n = 19$

$\therefore\ \{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19} 이다.

7. 첫째항이 -43, 공차가 7인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8항 ② 제 9항 ③ 제 10항

④ 제 11항 ⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$7n - 50 > 0, \ 7n > 50$

$$\therefore \ n > \frac{50}{7} = 7.14\cdots$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

8. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}$, $\cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항 ② 제12항 ③ 제13항
④ 제14항 ⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$

9. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$S_n = \dfrac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100$ 인

자연수 n의 최솟값을 구하면 된다.

$2^n - 1 > \dfrac{100}{3}$

$2^n > \dfrac{103}{3} \fallingdotseq 34.\times\times\times$

$2^5 = 32,\ 2^6 = 64$ 이므로

$n = 6$

10. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.
그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로
$2^{11} = 2048$
$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$
$n - 1 \geq 11$
$n \geq 12$

11. 첫째항이 -10, 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{11}|$ 의 값은?

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} a_n &= -10 + (n-1)\cdot 2 \\ &= 2n - 12 \end{aligned}$$

$a_n = 2n - 12 = 0, \quad \therefore\ n = 6$

즉, $a_1 \sim a_5$ 는 음수, $a_6 = 0$,

$a_7 \sim a_{11}$ 은 양수이다.

따라서

$$\begin{aligned} |a_1| + \cdots + |a_5| &= \left| \frac{5\{2\cdot(-10)+4\cdot 2\}}{2} \right| \\ &= 30 \end{aligned}$$

$a_7 = -10 + 6\cdot 2 = 2$

$a_{11} = -10 + 10\cdot 2 = 10$

$\therefore |a_7| + \cdots + |a_{11}| = \dfrac{5\cdot(2+10)}{2} = 30$

$\therefore$ (주어진 식)$= 30 + 0 + 30 = 60$

12. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-5 < d < -4$

㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$

㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$

$S_9 = \dfrac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$

$10 - 2d + 4d > 0$

$\therefore\ d > -5$

$S_{10} = \dfrac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$

$2(10 - 2d) + 9d < 0$

$\therefore\ d < -4$

$\therefore -5 < d < -4$(참)

㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$

㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로

$0 < 10 + 2d < 2$

즉, $0 < a_5 < 2$

$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$

$-15 < 3d < -12$ 이므로

$-5 < 10 + 3d < -2$

즉, $-5 < a_6 < -2$

$\therefore\ a_5 > 0,\ a_6 < 0$(참)

㉢$a_1 = 10 - 2d$ 이므로

$-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$

즉, $18 < a_1 < 20$

a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$

$a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -17$

$\therefore\ a_1 + a_9 = 2 \neq 0$(거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

13. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 20이고, 공차는 d인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n > 0$을 만족하는 n의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$\{a_n\}$이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로

$a_7 \cdot a_8 < 0$에서 $a_7 > 0,\ a_8 < 0$

$a_7 = 20 + 6d > 0,\ a_8 = 20 + 7d < 0$

이때 공차 d는 정수이므로 $d = -3$

$S_n > 0$을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$n(43 - 3n) > 0,\ n(3n - 43) < 0$

$$\therefore\ 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

14. 첫째항이 100 이고, 공차가 -3 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34 번째 항

해설

$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-3)$
$= -3n + 103 > 0$
$n < 34.333\cdots$
$\therefore n = 34$ 일 때 최대