1. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119$,

$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$

$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \ge 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$

$= \frac{n(n+1)\cdot 3}{3}$

$= n(n+1)$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

7. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 - n$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

(i) $n \geq 2$일 때
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 2n - 2$
(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$
(i), (ii)에서 $a_n = 2n - 2$ $(n \geq 1)$
$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 - 2 = 18$

8. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + 2n + \alpha$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 α의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + 2n + \alpha$
$S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 2(n-1) + \alpha$
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= 2n^2 + 2n + \alpha - (2n^2 - 4n + 2 + 2n - 2 + \alpha)$
$= 4n \ (n \geq 2)$
$a_1 = S_1$ 이므로
$4 = 4 + \alpha$
$\therefore \ \alpha = 0$

9. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$의 값은?

① $2^{10} - 3$　　② $2^{10} - 1$　　③ 2^{10}
④ $2^{10} + 1$　　⑤ $2^{10} + 3$

해설

$a_n = 2^n + (-1)^n$에서

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \\
&= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots (2^9 - 1) \\
&= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1 \\
&= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3
\end{aligned}
$$

10. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

11. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$

① $(-1)^{n+1} \times n$ ② $n-(-1)^n$ ③ $(-1)^n + n$

④ $(-1)^n \times n$ ⑤ $\frac{1}{2}\left\{1-(-1)^n\right\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$

$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$

$a_4 = (-1)^4 \cdot 4$이므로

$a_n = (-1)^n \cdot n$

12. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 77$
$a_{10} = a + 9d = 42$
$5d = -35$
$d = -7$
$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore \ a = 105$

$$\therefore \ a_n = 105 + (n-1) \times (-7) = -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$112 < 7n$
$16 < n$
$\therefore n = 17$

13. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}　② a_{17}　③ a_{18}　④ a_{19}　⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$
$a_{11} = a + 10d = 15$
연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$
$\therefore\ a_n = 35 + (n-1) \times (-2) = -2n + 37$
$-2n + 37 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$37 < 2n, \quad 18.5 < n$
$\therefore\ n = 19$
$\therefore\ \{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19}이다.

14. 수열 $8,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2}, \cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항 ② 제12항 ③ 제13항
④ 제14항 ⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$

15. 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000,\ 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times\times$$

16. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.
그런데 $2^{10} = 1024$이므로
$2^{11} = 2048$
$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$
$n - 1 \geq 11$
$n \geq 12$

17. 첫째항이 -10, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{11}|$의 값은?

① 60　② 70　③ 80　④ 90　⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} a_n &= -10+(n-1)\cdot 2 \\ &= 2n-12 \end{aligned}$$

$a_n = 2n-12 = 0, \quad \therefore\ n = 6$

즉, $a_1 \sim a_5$는 음수, $a_6 = 0$,

$a_7 \sim a_{11}$은 양수이다.

따라서

$$\begin{aligned} |a_1|+\cdots+|a_5| &= \left|\frac{5\{2\cdot(-10)+4\cdot 2\}}{2}\right| \\ &= 30 \end{aligned}$$

$a_7 = -10+6\cdot 2 = 2$

$a_{11} = -10+10\cdot 2 = 10$

$\therefore |a_7|+\cdots+|a_{11}| = \dfrac{5\cdot(2+10)}{2} = 30$

$\therefore$ (주어진 식)$= 30+0+30 = 60$

18. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 20이고, 공차는 d인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n > 0$을 만족하는 n의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$\{a_n\}$이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로

$a_7 \cdot a_8 < 0$에서 $a_7 > 0,\ a_8 < 0$

$a_7 = 20 + 6d > 0,\ a_8 = 20 + 7d < 0$

이때 공차 d는 정수이므로 $d = -3$

$S_n > 0$을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$n(43 - 3n) > 0,\ n(3n - 43) < 0$

$\therefore\ 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$