1. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

2. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64　② 80　③ 92　④ 100　⑤ 120

해설

$S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \dfrac{10(2\cdot 1 + 9\cdot 2)}{2} = 100$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

4. 제 3 항이 12 이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$　② $(-3) \cdot 2^{n-1}$　③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$
④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$　⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$
$a_6 = ar^5 = -96$
$r^3 = -8$
$\therefore r = -2$
$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$
$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

5. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$　② $\dfrac{x^{2n}}{x-1}$　③ $\dfrac{x^{2n}-1}{x-1}$
④ $\dfrac{x^{2n}-1}{x}$　⑤ $\dfrac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x, 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n}-1)}{x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x-1}$$

6. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$

7. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$

$= \log \dfrac{3}{1} + \log \dfrac{4}{2} + \log \dfrac{5}{3} + \cdots + \log \dfrac{11}{9} + \log \dfrac{12}{10}$

$= \log \left(\dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{11}{9} \cdot \dfrac{12}{10} \right)$

$= \log \dfrac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

8. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

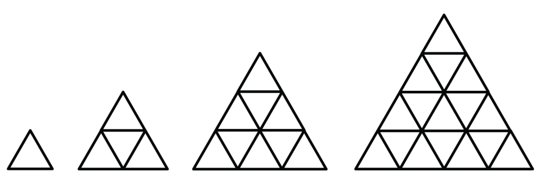
$$1, 4, 9, 16 \cdots$$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$
④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$
$\therefore a_n = n^2$

9. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

10. 수열 4, a, b, c, 16이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

해설

$a-4=d$
$b-a=d$
$c-b=d$
$16-c=d$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리
더하면 $16-4=4d$ $\therefore d=3$
$\therefore a=4+3=7$
$b=7+3=10$
$c=10+3=13$
$\therefore a+b+c=30$

11. 두 수 $\frac{45}{4}$, $\frac{99}{4}$ 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 $(n+2)$개의 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 그 합이 180이다. 이때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

구하는 합을 S_{n+2}라고 하면

$S_{n+2} = \frac{(n+2)\left(\frac{45}{4}+\frac{99}{4}\right)}{2} = 180$

$18(n+2) = 180$, $n+2 = 90$ $\therefore n = 8$

12. 8과 27사이에 두 수 x, y를 넣었더니 8, x, y, 27이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, x, y, 27이 등비수열이므로

$a_1 = 8$

$a_4 = a_1 r^3 = 27,\ 8r^3 = 27$

$r^3 = \dfrac{27}{8},\quad \therefore r = \dfrac{3}{2}$

$x = a_1 r = 8 \cdot \dfrac{3}{2} = 12$

$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \dfrac{9}{4} = 18$

$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$

13. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$(k는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$

$= \dfrac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \dfrac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots$ ㉠

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$

$= \dfrac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r = 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2^{2k} - 1}{3} = 85$, $2^{2k} = 256 = 2^8$

따라서 $2k = m = 8$

$r + m = 10$

14. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만 (원)

15. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 25 ④ 27 ⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

16. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{10}{11}$ ④ $\dfrac{20}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

17. 등차수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots ,\ x_p,\ 100,\ y_1,\ y_2, \cdots ,\ y_q,\ 105$ 의 합이 2375 가 되도록 하는 $p,\ q$ 의 값은?

① $p=11,\ q=3$ ② $p=12,\ q=4$ ③ $p=15,\ q=3$
④ $p=16,\ q=4$ ⑤ $p=17,\ q=5$

해설

(i) 두 수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots ,\ x_p,\ 100$ 과 $100,\ y_1,\ y_2, \cdots , y_q,\ 105$ 는 공차가 같은 등차수열이므로

$100 = 85 + (p+1)d,\ 105 = 100 + (q+1)d$

$\dfrac{100-85}{p+1} = \dfrac{105-100}{q+1}$

$15(q+1) = 5(p+1) \quad \therefore\ p = 3q+2$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$ 인 등차수열이고, 그 합이 2375 이므로 $\dfrac{(p+q+3)(85+105)}{2} = 2375$

$p+q+3 = 25 \quad \therefore\ p+q = 22 \cdots$ ㉠

이때, (i) 에서 $p = 3q+2$ 이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p=17,\ q=5$

18. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① 5 : 17 ② 15 : 31 ③ 17 : 9
④ 31 : 15 ⑤ 49 : 50

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$
b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면
$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\}$,
$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$
$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k}$,
$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)
따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$
$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k+(n-1)3k$
$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$
$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k+(n-1)7k$
$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$
$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$

19. 한 인터넷 쇼핑몰 업체는 자신의 사이트에서 구매한 금액에 대하여 천 원당 1점씩의 포인트를 적립해주고 포인트가 1만 2천 포인트가 되면 상품권을 준다고 한다. 이때, 구매자가 그달에 한 번이라도 물품을 구매하면 다음 달은 전달까지의 누적 포인트의 1% 씩을 적립해 준다고 한다. 이 업체를 이용하는 승연이는 매달 일정한 금액만큼의 물품을 구입한다고 한다. 승연이가 물품을 구입하기 시작한 후 12개월째에 상품권을 받으려면, 최소한 매달 얼마만큼의 물품을 구입해야 하는가?(단, $1.01^{12} = 1.12$로 계산한다.)

① 60만 원 ② 70만 원 ③ 80만 원
④ 90만 원 ⑤ 100만 원

해설

승연이가 매달 a천원씩 물품을 구입하였다면 매달 a점씩의 포인트가 적립된다.
따라서 12개월째 적립 포인트는
$a + a(1 + 0.01) + a(1 + 0.01)^2 + \cdots + a(1 + 0.01)^{11}$
$= \dfrac{a(1.01)^{12} - 1}{1.01 - 1} = \dfrac{a(1.12 - 1)}{0.01} = 12a$
따라서 1만 2천 포인트 이상이 되면 상품권을 받으므로
$12a \geq 12000 \quad \therefore a \geq 1000$
즉, 승연이는 매달 최소한 100만원 이상의 물품을 구입해야 12개월째에 사은품을 받을 수 있다.

20. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는?

$$a_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}},\ a_2 = \sqrt{5+2\sqrt{6}},\ a_3 = \sqrt{7+2\sqrt{12}},\cdots$$

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$a_1 = 1 + \sqrt{2}$
$a_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
$a_3 = \sqrt{3} + \sqrt{4}$
$\vdots$
$a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$
$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$S_n = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$S_n = \sqrt{n+1} - 1$ 이 한자리 자연수가 되어야 한다.
$S_3 = \sqrt{4} - 1 = 1$
$S_8 = \sqrt{9} - 1 = 3 - 2 = 2$
$\vdots$
$S_{120} = \sqrt{121} - 1 = 11 - 1 = 10$
$\therefore$ 9개

22. x에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값은?

① $\alpha+\beta = \frac{1}{11},\ \alpha\beta = -\frac{11}{2}$　② $\alpha+\beta = \frac{10}{11},\ \alpha\beta = -\frac{11}{2}$
③ $\alpha+\beta = \frac{10}{11},\ \alpha\beta = -\frac{2}{11}$　④ $\alpha+\beta = 11,\ \alpha\beta = -\frac{11}{2}$
⑤ $\alpha+\beta = 11,\ \alpha\beta = -22$

해설

$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2$이고,

$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= x\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\}$

$= x\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}x$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 - \frac{10}{11}x - 55 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$

$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$