1. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

2. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \dfrac{10(2\cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

4. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$　② $(-3) \cdot 2^{n-1}$　③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$　⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

5. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$ ② $\dfrac{x^{2n}}{x-1}$ ③ $\dfrac{x^{2n}-1}{x-1}$

④ $\dfrac{x^{2n}-1}{x}$ ⑤ $\dfrac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x, 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n}-1)}{x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x-1}$$

6. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$$

7. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$　② $\log 50$　③ $\log 55$　④ $\log 60$　⑤ $\log 66$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$$
$$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10}$$
$$= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right)$$
$$= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$$

8. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$1, 4, 9, 16 \cdots$$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

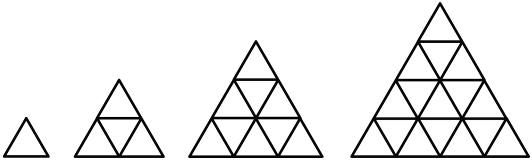
④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

9. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

10. 수열 $4,\ a,\ b,\ c,\ 16$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$a-4=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$16-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $16-4=4d \quad \therefore d=3$

$\therefore a=4+3=7$

$b=7+3=10$

$c=10+3=13$

$\therefore a+b+c=30$

11. 두 수 $\frac{45}{4}$, $\frac{99}{4}$ 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 $(n+2)$개의 수가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 그 합이 180이다. 이때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

구하는 합을 S_{n+2}라고 하면

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)\left(\frac{45}{4} + \frac{99}{4}\right)}{2} = 180$$

$18(n+2) = 180,\ n+2 = 90 \quad \therefore\ n = 8$

12. 8과 27사이에 두 수 x, y를 넣었더니 $8,\ x,\ y,\ 27$이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$8,\ x,\ y,\ 27$이 등비수열이므로

$a_1 = 8$

$a_4 = a_1 r^3 = 27,\ 8r^3 = 27$

$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$

$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$

$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$

$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$

13. $a_1 = 1$이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 m이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots a_m = 170$이다. 이때, $r + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$(k는 자연수)라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$은 공비가 r^2인 등비수열이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$

$= \dfrac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \dfrac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots ㉠$

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$

$= \dfrac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $r = 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2^{2k} - 1}{3} = 85, \ 2^{2k} = 256 = 2^8$

따라서 $2k = m = 8$

$r + m = 10$

14. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만(원)

15. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 25 ④ 27 ⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

16. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{10}{11}$ ④ $\dfrac{20}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

17. 등차수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_p,\ 100,\ y_1,\ y_2, \cdots,$ $y_q,\ 105$ 의 합이 2375가 되도록 하는 $p,\ q$ 의 값은?

① $p=11,\ q=3$ ② $p=12,\ q=4$ ③ $p=15,\ q=3$

④ $p=16,\ q=4$ ⑤ $p=17,\ q=5$

해설

(i) 두 수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_p,\ 100$ 과 $100,\ y_1,\ y_2, \cdots, y_q,\ 105$ 는 공차가 같은 등차수열이므로

$$100=85+(p+1)d,\ 105=100+(q+1)d$$

$$\frac{100-85}{p+1}=\frac{105-100}{q+1}$$

$$15(q+1)=5(p+1) \quad \therefore\ p=3q+2$$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$ 인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\frac{(p+q+3)(85+105)}{2}=2375$

$$p+q+3=25 \quad \therefore\ p+q=22 \cdots ㉠$$

이때, (i)에서 $p=3q+2$ 이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p=17,\ q=5$

18. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① $5 : 17$ ② $15 : 31$ ③ $17 : 9$

④ $31 : 15$ ⑤ $49 : 50$

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$

b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\},$$

$$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$$

$$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k},$$

$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$

$$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k + (n-1)3k$$

$$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k + (n-1)7k$$

$$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k + 18k\right) : \left(\frac{9}{2}k + 42k\right)$$

$$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$$

19. 한 인터넷 쇼핑몰 업체는 자신의 사이트에서 구매한 금액에 대하여 천 원당 1점씩의 포인트를 적립해주고 포인트가 1만 2천 포인트가 되면 상품권을 준다고 한다. 이때, 구매자가 그달에 한 번이라도 물품을 구매하면 다음 달은 전달까지의 누적 포인트의 1% 씩을 적립해 준다고 한다. 이 업체를 이용하는 승연이는 매달 일정한 금액만큼의 물품을 구입한다고 한다. 승연이가 물품을 구입하기 시작한 후 12개월째에 상품권을 받으려면, 최소한 매달 얼마만큼의 물품을 구입해야 하는가?(단, $1.01^{12} = 1.12$로 계산한다.)

① 60만 원 ② 70만 원 ③ 80만 원

④ 90만 원 ⑤ 100만 원

해설

승연이가 매달 a천원씩 물품을 구입하였다면 매달 a점씩의 포인트가 적립된다.

따라서 12개월째 적립 포인트는

$a + a(1 + 0.01) + a(1 + 0.01)^2 + \cdots + a(1 + 0.01)^{11}$

$$= \frac{a(1.01)^{12} - 1}{1.01 - 1} = \frac{a(1.12 - 1)}{0.01} = 12a$$

따라서 1만 2천 포인트 이상이 되면 상품권을 받으므로

$12a \geq 12000 \quad \therefore a \geq 1000$

즉, 승연이는 매달 최소한 100만원 이상의 물품을 구입해야 12개월째에 사은품을 받을 수 있다.

20. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{n}{n+1}$ ② $\dfrac{2n}{n+1}$ ③ $\dfrac{3n}{n+1}$ ④ $\dfrac{4n}{n+1}$ ⑤ $\dfrac{5n}{n+1}$

해설

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\dfrac{k(k+1)}{2}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는?

$a_1=\sqrt{3+2\sqrt{2}},\ a_2=\sqrt{5+2\sqrt{6}},\ a_3=\sqrt{7+2\sqrt{12}},\cdots$

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$a_1=1+\sqrt{2}$

$a_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$a_3=\sqrt{3}+\sqrt{4}$

$\vdots$

$a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$S_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+$
$\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$S_n=\sqrt{n+1}-1$ 이 한자리 자연수가 되어야 한다.

$S_3=\sqrt{4}-1=1$

$S_8=\sqrt{9}-1=3-2=2$

$\vdots$

$S_{120}=\sqrt{121}-1=11-1=10$

$\therefore$ 9개

22. x에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \dfrac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값은?

① $\alpha+\beta = \dfrac{1}{11},\ \alpha\beta = -\dfrac{11}{2}$ ② $\alpha+\beta = \dfrac{10}{11},\ \alpha\beta = -\dfrac{11}{2}$

③ $\alpha+\beta = \dfrac{10}{11},\ \alpha\beta = -\dfrac{2}{11}$ ④ $\alpha+\beta = 11,\ \alpha\beta = -\dfrac{11}{2}$

⑤ $\alpha+\beta = 11,\ \alpha\beta = -22$

해설

$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2$ 이고,

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= x\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$= x\left(1-\frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}x$$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \dfrac{10\cdot 11}{2} = 55$ 이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 - \dfrac{10}{11}x - 55 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$$

$$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$$