**1.** $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

**해설**

$$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$
$$= 550$$

**2.** 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9 ② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{99}-1$

④ $\sqrt{101}-1$ ⑤ 11

해설

(준식)$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$

**3.** 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$　② $a_{20}-a_{10}$　③ $a_{21}-a_9$

④ $a_{21}-a_{10}$　⑤ $a_{21}-a_{11}$

**해설**

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로

$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$

$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$

$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots b_9)$

$= a_{21} - a_{10}$

**4.** $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

**해설**

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

**5.** $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① $2^{n-1}$ ② $2^n$ ③ $2^{n-2}$ ④ $2^{n+1}$ ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

$a_n$은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$
$$= 2^{n-2}$$

**6.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 $\alpha_n$, $\beta_n$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$(\text{준 식})=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$$

$$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$$

**7.** 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+9\cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+9\cdot 2^9\cdots$ ㉠

$2S=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+8\cdot 2^9+9\cdot 2^{10}\cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned}-S&=\frac{2(2^9-1)}{2-1}-9\cdot 2^{10}\\&=2\cdot 2^9-2-9\cdot 2^{10}\\&=2\cdot 2^9-18\cdot 2^9-2\\&=-16\cdot 2^9-2\end{aligned}$$

$\therefore S=2^{13}+2=1024\times 8+2=8194$

**8.** 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots,$ 에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 $7$이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $28$

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

$1$군은 $1$

$2$군은 $1,\ 2$

$3$군은 $1,\ 2,\ 3$이므로

$7$군은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

($6$까지의 항의 총수)$= 1+2+\cdots+6 = 21$

$21+7 = 28$(번째 항)

**9.** 수열 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (3,\ 0),$ $(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (4,\ 0)\cdots$ 에서 $(10,\ 9)$는 제 몇 항인가?

① 180 ② 189 ③ 198 ④ 199 ⑤ 206

해설

$x$좌표와 $y$좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\},$
$\{(3,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3)\},\cdots$
$(10,\ 9)$은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
$\therefore (2+3+4+\cdots+19)+10=199$

**10.** 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3\ \ \therefore a_2 = 1$
$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6\ \ \therefore a_3 = 5$
$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9\ \ \therefore a_4 = 4$
$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$

**11.** 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 $a_n$에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-45$

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$이므로 $p + q = -45$

**12.** 두 수열 $a_n$, $b_n$에 대하여 $b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이 성립한다. $b_n = 3^{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$의 값은?

① $\dfrac{5}{33}$ ② $\dfrac{25}{99}$ ③ $\dfrac{15}{101}$ ④ $\dfrac{25}{101}$ ⑤ $\dfrac{35}{101}$

**해설**

$b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이므로

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{3^{n(n+1)}}{3^{(n-1)n}} = 3^{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 3^{2k} \cdot \log_3 3^{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k \cdot 2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{101}\right)$$

**13.** 다음은 임의의 자연수 $n$에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변)이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 ㉠을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$$

즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서, (i),(ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+1}{2k+3}$

② $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+2}{2k+3}$

③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+1}{2k+3}$

④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+2}{2k+3}$

⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}(\text{우변})&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

**14.** 다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠
이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$
② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$
④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$
$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가)$=2k+1$, (나)$=(k+1)^2$

**15.** $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$ 일 때, $100S$ 의 값은?

① 95 ② 100 ③ 105 ④ 110 ⑤ 115

해설

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$$

$$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

$$\therefore 100S=100\times\frac{19}{20}=95$$

**16.** 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots$ 에서 제 100항까지 $\frac{2}{3}$ 와 같은 값은 몇 번 나타나는가?

① 2번 ② 3번 ③ 4번 ④ 5번 ⑤ 6번

해설

수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots$ 에서

(분자)+ (분모)의 합이 같은 것끼리 묶으면

제1군 제2군 제3군 제5군

$$(1), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) \cdots$$

제1군에서 제$n$군까지의 항의 개수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$n=13$일 때 $\frac{13 \cdot 14}{2}=91$, $n=14$일 때

$$\frac{14 \cdot 15}{2}=105$$

이므로 제 100항은 14군의 제9번째 항이다.

그런데 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$은

제 14군의 6번째 항이므로

제 100항까지의 $\frac{2}{3}$와 같은 값은 3번 나온다.

**17.** 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n$($n$은 자연수)으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$을 12로 나눈 나머지는?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

**해설**

주어진 조건에서

$a_1 = 1$

$a_2 = 2a_1 = 1 \times 2$

$a_3 = 3a_2 = 1 \times 2 \times 3$

$\vdots$

$a_n = na_{n-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

그런데, $a_4 = 1\times2\times3\times4$는 12의 배수이므로 $a_5,\ a_6,\ \cdots,\ a_{2014}$도 12의 배수이다.

따라서, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$을 12로 나눈 나머지는

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 \\ &= 1 + 2 + 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

**18.** 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

$\therefore\ 3a_1 + 5a_2 = 62$

$a_1,\ a_2$ 의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$ 이므로

$a_1 = 4,\ a_2 = 10$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 14$

**19.** 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 스티커와 가로, 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형 모양의 스티커가 있다. 이 두 종류의 스티커를 사용하여 왼쪽부터 차례로 붙이되, 가로의 길이가 1인 스티커 다음에는 반드시 가로의 길이가 2인 스티커가 와야 한다고 할 때, 가로의 길이가 $n$, 세로의 길이가 1인 직사각형을 두 종류의 스티커를 이용하여 겹치지 않게 완전히 메우는 방법의 수를 $a_n$이라 하자. 이 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$　　② $a_{n+3} = a_{n+3} + a_n$

③ $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}$　　④ $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

⑤ $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$

**해설**

세로의 길이는 모두 1이므로 가로의 길이만 생각하기로 한다. 가로의 길이가 $(n+3)$인 직사각형을 스티커로 메우는 경우의 수는 $a_{n+3}$이고, 다음 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 처음에 붙인 스티커가 가로의 길이가 1인 경우 두 번째 스티커는 반드시 가로의 길이가 2이어야 하고, 나머지 $n$만큼만 주어진 규칙대로 붙이면 되므로 이 경우의 수는 $a_n$이다.

(ii) 처음에 붙인 스티커가 가로의 길이가 2인 경우 나머지 $(n+1)$만큼은 주어진 규칙대로 붙이면 되므로 이 경우의 수는 $a_{n+1}$이다.

(i), (ii)에서 $a_{n+3} = a_n + a_{n+1}$

**20.** 다음은 임의의 자연수 $n$에 대하여 부등식 $\frac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=\frac{5+3}{2}=4$, (우변)$=4^1=1$
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$
> 위의 식의 양변에 4를 곱하면
> $4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$
> 이므로
> $\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$
> $= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k$, $5^k-3^k$　② $4^{k+1}$, $5^k-3^k$
③ $4^k$, $5^k+3^k$　④ $4^{k+1}$, $5^k+3^k$
⑤ $4^{k+1}$, $5^{k+1}-3^{k+1}$

**해설**

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{4^k}$

위의 식의 양변에 4를 곱하면

$4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{4^k}$

이므로

$\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$

$= \frac{\boxed{5^k-3^k}}{2} \geq 0$

따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.

**21.** $\sum_{k=1}^{10} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}$ 의 값은?

① $\dfrac{220}{3}$　② $110$　③ $\dfrac{440}{3}$　④ $\dfrac{550}{3}$　⑤ $220$

**해설**

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} k$$

$$=\frac{220}{3}$$

**22.** 모든 자연수 $n$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다. 이때, $a_{10}$의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{k} = b_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^2$

$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \ (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$

**23.** $\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]$ 의 값은? (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 625　　② 650　　③ 635　　④ 636　　⑤ 640

해설

$\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]$ 에서 $\left[\sqrt{k}\right]$ 의 값을 알아보면

$k=1$부터 $k=3$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=1$

$k=4$부터 $k=8$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=2$

$k=9$부터 $k=15$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=3$

$k=16$부터 $k=24$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=4$

$k=25$부터 $k=35$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=5$

$k=36$부터 $k=48$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=6$

$k=49$부터 $k=63$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=7$

$k=64$부터 $k=80$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=8$

$k=81$부터 $k=99$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=9$

$k=100$에서 $\left[\sqrt{k}\right]=10$

$\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times13+$
$7\times15+8\times17+9\times19+10$

$=\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)+10$

$=2\cdot\dfrac{9\cdot10\cdot19}{6}+\dfrac{9\cdot10}{2}+10$

$570+45+10=625$

**24.** 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 2}$로 정의될 때, $[a_{10}]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a_{n+1} - \alpha = \dfrac{\beta(a_n - \alpha)}{a_n + 2}$의 꼴로 고치면 $\alpha + \beta = 3,\ -\alpha\beta + 2\alpha = 2$

이므로 $(\alpha,\ \beta)$은 $(2,\ 1)$ 또는 $(-1,\ 4)$이다.

$(\alpha,\ \beta) = (2,\ 1)$이라고 하면 $a_{n+1} - 2 = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2} \cdots$ ㉠

㉠식의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} = \frac{a_n + 2}{a_n - 2} = 1 + \frac{4}{a_n - 2} \cdots ㉡$$

㉡식을 $\dfrac{1}{a_{n+1} - 2} - k = 4\left(\dfrac{1}{a_n - 2} - k\right)$꼴로 고치면 $k = -\dfrac{1}{3}$이므로

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} + \frac{1}{3} = 4\left(\frac{1}{a_n - 2} + \frac{1}{3}\right)$$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n - 2} + \dfrac{1}{3}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{4}{3}$이고, 공비가 $4$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \frac{1}{a_n - 2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 4^n$$

이 식을 $a_n$에 대해서 정리하면 $a_n = \dfrac{3}{4^n - 1} + 2$

$$\therefore\ [a_{10}] = \left[\frac{3}{4^{10} - 1} + 2\right] = 2$$