

1. 철이와 돌이는 동업을 하여 수익금을 6 : 4의 비율로 나누어 갖기로 하였다. 철이의 수익금이 3만원이었다면, 돌이의 수익금은 얼마인지 구하시오.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 20000 원

해설

돌이의 수익금을 x 만원이라 하면

$6 : 4 = 3\text{만원} : x$ 이므로 돌이의 수익금은 2만원

2. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\
 &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2
 \end{aligned}$$

3. 분수식 $\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{x+1}{x^2-4x+3} \div \frac{2x^2+5x+3}{x^2-5x+6}$ 을 간단히 하면 ?

① 1

② -2

③ $\frac{-x^2+2x+7}{(x-1)(x+2)(2x+3)}$

⑤ $\frac{-x^2+2x+7}{(x+1)(x-2)(2x-3)}$

④ $\frac{x^2-2x+7}{(x-1)(x+2)(2x+3)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{x+1}{x^2-4x+3} \div \frac{2x^2+5x+3}{x^2-5x+6} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-3)(x-1)} \\ & \quad \times \frac{(x-2)(x-3)}{(2x+3)(x+1)} \\ &= \frac{2x+3-(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)(2x+3)} \\ &= \frac{-x^2+2x+7}{(x-1)(x+2)(2x+3)} \end{aligned}$$

4. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$$\therefore a=-1, b=2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

5. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

6. 다음 유리식을 간단히 하시오.

$$\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}$$

① 1

② x

③ $-x$

④ $\frac{1}{x}$

⑤ $-\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준식}) = \frac{\frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)}}{\frac{(1+x) - (1-x)}{(1-x)(1+x)}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 $(1-x)(1+x)$ 를 곱하면
(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x) + \frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x) - \frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(1+x) + (1-x)}{(1+x) - (1-x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

7. $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} + \frac{x+5}{x+4}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ② $\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ③ $\frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ④ $\frac{2(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
 ⑤ $\frac{2(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{준 식}) &= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \\
 &\quad - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) \\
 &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \\
 &= \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} - \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\
 &= \frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}
 \end{aligned}$$

8. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore x(x+8) = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 1$$

9. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{13 \times 14} = \frac{a}{14}$ 에서 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\text{준식} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{14} = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

$$\therefore a = 13$$

10. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

▷ 정답 : $c = 3$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$$

11. $x + \frac{1}{x} = 4$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하면?

① $-4\sqrt{3}$

② $4\sqrt{3}$

③ $\pm 4\sqrt{3}$

④ $8\sqrt{3}$

⑤ $\pm 8\sqrt{3}$

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$$

$$x - \frac{1}{x} = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) = 4 \times (\pm 2\sqrt{3}) \\ &= \pm 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

12. $x < 0$ 이고 $x^4 - x^2 + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$

② $-\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{5}$

④ $-\sqrt{6}$

⑤ $-\sqrt{7}$

해설

$x^4 - x^2 + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 3$$

$$\therefore x < 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$$

13. $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$ 이고, $xy > 0$ 일 때, $\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ 의 값은?

① $\frac{2}{5}$

② $\frac{4}{5}$

③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{5}$

⑤ $\frac{9}{5}$

해설

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} x & -3y \\ 2x & y \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-3y)(2x+y) = 0$$

$$x = 3y \text{ 또는 } 2x = -y$$

$xy > 0$ 이므로 x, y 의 부호는 같다

$$\therefore x = 3y$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \frac{(3y-y)^2}{(3y)^2+y^2} = \frac{2}{5}$$

14. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

15. 다음 등식이 성립할 때, 상수 k 의 값은?

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

① -1

② -5

③ -8

④ -10

⑤ -12

해설

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

$$\begin{cases} x+2y = \frac{z}{2} & \cdots \textcircled{1} \\ 2y+z = \frac{3}{4}z & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② 하면

$$x-z = -\frac{1}{4}z, x = \frac{3}{4}z, y = -\frac{1}{8}z$$

$$\frac{x+8y-z}{k} = \frac{\frac{3}{4}z - z - z}{k} = \frac{-\frac{5}{4}z}{k} = \frac{z}{4}$$

$$\therefore k = -5$$

해설

가비의 리에 따라

$$\begin{aligned} \frac{x+2y}{2} &= \frac{6y+3z}{3 \times 3} = \frac{-4z}{4 \times (-4)} \\ &= \frac{x+8y-z}{2+9-16} = \frac{x+8y-z}{-5} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -5$$

16. 유리식 $\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$ 일 때, k 의 값을 구하면? (단, $abc \neq 0$)

- ① 2 또는 -1 ② 0 또는 -1 ③ -1 또는 -1
 ④ 2 또는 3 ⑤ -2 또는 -1

해설

$$\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$$

$$\frac{b+3c}{2a} = k, \frac{3c+2a}{b} = k, \frac{2a+b}{3c} = k$$

각각 정리하면

$$b+3c = 2ak \cdots \textcircled{1}$$

$$3c+2a = bk \cdots \textcircled{2}$$

$$2a+b = 3ck \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} : 2(b+3c+2a) = k(2a+b+3c)$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ 또는 } 2a+b+3c = 0$$

$2a+b+3c = 0$ 인 경우,

$$\textcircled{1} \text{에 대입해 보면 } -2a = 2ak, k = -1$$

$$\therefore k = 2, -1$$