

1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$

② $y = -6x$

③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$

⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$
이다.

2. 두 함수 $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $(f \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

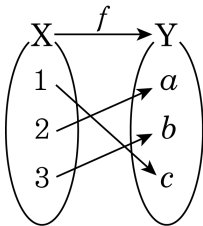
⑤ 2

해설

$$f(1) = 0 \text{ 이므로 } (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$$

$$\therefore (f \circ g \circ f)(1) = f(1) = 0$$

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a) + f^{-1}(c)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

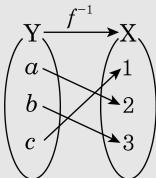
③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$$f^{-1}(a) + f^{-1}(c) = 2 + 1 = 3$$

4. 함수 $y = x - 2$ 의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$

② $y = x + 2$

③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$ 를 x 에 관해서 풀면

$$x = y + 2$$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x + 2$

5. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

6. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

7. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$

㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,

$f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$

그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.

$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$

따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

8. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= (x^3 + x^2 + x - 5)^3 \\ &\quad + (x^3 + x^2 + x - 5)^2 + (x^3 + x^2 + x - 5) - 5\end{aligned}$$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x=1$ 을 대입한 것과 같다.

$$f(1) = -2 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f(f(1)) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 5 = -11$$

9. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x) = x+2$

② $f(x) = x-2$

③ $f(x) = 2x$

④ $f(x) = 2x+1$

⑤ $f(x) = 2x+2$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2 \quad \dots \textcircled{7} \text{에서}$$

$$\frac{x+1}{2} = t \text{라 하면 } x = 2t-1 \text{ 이므로}$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } f(t) = 2t-1+2 = 2t+1$$

$$\therefore f(x) = 2x+1$$

10. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

11. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x - 1$

② $y = \frac{1}{2}x + 1$

③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$

④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$$y = 2x - 2, x = \frac{1}{2}y + 1 \quad x, y \text{ 를 바꿔주면}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

12. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$, $f^{-1}(6) = 2$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 이므로

$$a + b = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$f^{-1}(6) = 2$ 에서 $f(2) = 6$ 이므로

$$2a + b = 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8$$

13. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$
 $x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

14. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8)$$

$$f^{-1}(8) = a \text{라 놓으면 } f(a) = 2a + 2 = 8$$

$$\therefore a = f^{-1}(8) = 3$$

15. 두 함수 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = -6x + 2$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $-3x + 17$

② $-3x - 13$

③ $-3x + 13$

④ $-3x$

⑤ $-5x + 10$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x)$$

$$(k \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$f(x) = 2x - 5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

$$\frac{y+5}{2} = x, x = \frac{y}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(x) = -6 \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \right) + 2 = -3x - 13$$

16. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f = f^{-1} \text{이므로 } (f \circ f)(x) = x$$

$$f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$$

$$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$$

$$\text{즉, } a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0 \text{이므로 } a = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x + 4 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$$

17. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002

② 2004

③ 2006

④ 2008

⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

18. 두 함수 f, g 를 $f(x) = x - 1, g(x) = 2x + 4$ 로 정의할 때, $(f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f \\ &= f \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot f \\ &= g^{-1} \cdot f \\ \therefore (f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3) \\ &= (g^{-1} \cdot f)(3) \\ &= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) \\ &\text{이 때, } g^{-1}(2) = a \text{라 하면} \\ &g(a) = 2 \text{에서 } 2a + 4 = 2 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

19. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = 2x + 5$ 로 정의할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면

$$f(a) = 1, f(b) = 5$$

$f(x) = 2x + 5$ 이므로

$$f(a) = 1 \text{ 에서 } 2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$$

$$f(b) = 5 \text{ 에서 } 2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a + b = -2$$